Subject : Date :...../...../.....

# Lineer Denklem Sistemleri

n bilinmeyenli m denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

satır sütun

Eğer hiçbir çözüm yoksa tutarsız, en az bir çözüm varsa tutarlı denir

Eğer $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_m = 0$ ise homojen sistem denir

Homojen sistemdeki $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$ trivial (aşikar) çözüm, aksi halde trivial olmayan çözüm denir

**Not:** Çözümleri aynı olan sistemlere eş sistemler denir.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -7 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{matrix} \qquad \begin{cases} 8x_1 - 3x_2 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 10x_1 - 2x_2 = 14 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{matrix}$$

Örnek:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 & (1) \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 & (2) \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 14 \quad (2) \\ -2/\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \quad (1) \\ \hline -7x_2 - 4x_3 &= 2 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \quad (3) \\ -3/\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \quad (1) \\ \hline -5x_2 - 10x_3 &= -20 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7x_2 - 4x_3 &= 2 \quad (4) \\ 2/\ x_2 + 2x_3 &= 4 \quad (5) \\ \hline -5x_2 &= 10 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{tek çözüm}$$

Subject :

Date :...../...../.....

Örnek: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 & (1) \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 & (2) \end{cases}$

$$\begin{aligned} -2 \,/\, x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -4 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 4 \quad (2) \end{aligned}$$

$$-3(x_2 - x_3) = 12$$

$$x_2 - x_3 = -4 \Rightarrow x_2 = x_3 - 4$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -4 \quad (1) \\ -2 \,/\, 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 4 \quad (2) \end{aligned}$$

$$-3(x_1 - x_3) = -12$$

$$x_1 - x_3 = 4 \Rightarrow x_1 = x_3 - 4$$

(1) $(x_3 + 4) + 2(x_3 - 4) - 3x_3 = -4 \Rightarrow -4 = -4$

(2) $2(x_3 + 4) + (x_3 - 4) - 3x_3 = 4 \Rightarrow 4 = 4$

$x_3$ herhangi bir reel sayı olabilir

↳ sonsuz çözüm

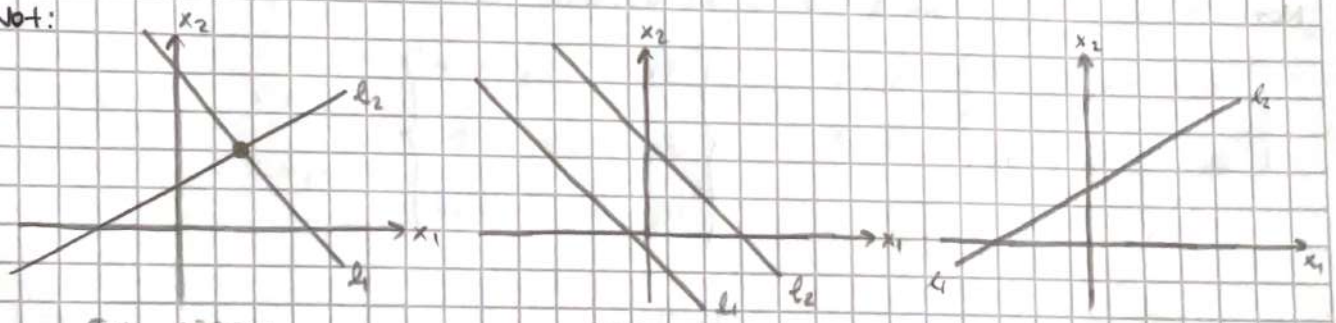
Örnek: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -7 & (1) \\ 2x_1 - 6x_2 = 7 & (2) \end{cases}$

$$\begin{aligned} -2 \,/\, x_1 - 3x_2 &= -7 \quad (1) \\ 2x_1 - 6x_2 &= 7 \quad (2) \end{aligned}$$

$0 \neq 21 \longrightarrow$ hatalıdır

↳ çözüm yok

Not:




Tek çözüm — Çözüm yok — Sonsuz çözüm

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = c_1 \ (l_1) \\ b_1x_1 + b_2x_2 = c_2 \ (l_2) \end{cases}$$

Not: Yok etme metodları

1) $i$. ve $j$. denklemler yer değiştirilebilir

2) Denklemlerden herhangi biri sıfırdan farklı bir sabit ile çarpılabilir

3) $i$. denklem yerine $[c \times (j.\ \text{denklem})] + i.$ denklem yazılabilir $(i \neq j)$

Subject: Date:

# Matrisler ve Matris İşlemleri

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$ tipinde matris
($m$ satır, $n$ sütundan oluşan matris)

$m$ satır, $n$ sütun

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanları
$A$'nın köşegen (ana köşegen) üzerinde

$A = [a_{ij}]$

$A$ matrisinin $i$. satırı $[a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in}]$ $(1 \leq i \leq m)$

$A$ matrisinin $j$. sütunu $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ $(1 \leq j \leq n)$

**Not:** $m \times n$ tipinden $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrislerinin karşılıklı elemanları eşitse bunlara **eşit matrisler** denir.

## Toplam

$m \times n$ tipinde $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrislerinin toplamı $C = [c_{ij}]$ $(c_{ij} = a_{ij} + b_{ij})$ şeklindedir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad A + B = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Not:** $m \times n$ tipinde $A = [a_{ij}]$ $c \in \mathbb{R}$ sayısı ile çarpımı $cA$ matrisi $C = [c_{ij}]$ $[(i = 1, 2, \ldots, m)$ ve $(j = 1, 2, \ldots, n)$ için $c_{ij} = c \cdot a_{ij}]$ olarak tanımlanır.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2} A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3/2 \\ 7/2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

## Fark

$m \times n$ tipinde $A$ ve $B$ matrislerinin farkı $A + (-1)B$, $A - B$ şeklinde ifade edilir.

Subject :

Date :...../...../.....

# Toplam (Sigma) Sembolü

$$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n$$

indeks (index)

1) $\sum_{i=1}^{n} (r_i + s_i) a_i = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i + \sum_{i=1}^{n} s_i a_i$

2) $\sum_{i=1}^{n} c(r_i a_i) = c \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$

3) $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

# Çarpım

$A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde, $B = [b_{ij}]$ $n \times p$ tipinde iki matris olsun $A \cdot B = C = [c_{ij}]$ matrisi $m \times p$ tipindedir.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} \qquad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, p \end{array} \right\}$$

$C = A \cdot B$'nin $(i,j)$ inci elemanı; $A$'nın $i$ satırı ile $B$'nin $j$ kolonundaki elemanların karşılıklı çarpımlarının toplamıdır.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Subject :

Date :...../...../.....

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1.(-2) + 2.4 + (-1).2 & 1.5 + 2.(-3) + (-1).1 \\ 3.(-2) + 1.4 + 4.2 & 3.5 + 1.(-3) + 4.1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$$

Not: $A \cdot x = B$ (A katsayılar matrisi)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$[A \,\vdots\, B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

ek matris

Örnek:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 5 \\ -2x_1 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

ek matris

Subject :

Date :...../...../.....

# Transpoz (devriğ)

$m \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ matrisinin transpozu (devriği) $A'$ (veya $A^T$) olarak gösterilir, $a'_{ij} = a_{ji}$ şeklinde tanımlanır

$A'$ matrisi, $A$ matrisinin satırlarının sıra, sütunlarına satır yapılmasıyla elde edilir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \text{ ise } A' = A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

## Ödev

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisler verilsin (eğer mümkünse) işlemleri yapınız

(a) $C + E$

$$\underset{C}{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}} + \underset{E}{\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) $A \cdot B$ ve $B \cdot A$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}} \cdot \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}} = \begin{bmatrix} 1.1+2.2+3.3 & 1.0+2.1+3.2 \\ 2.1+1.2+4.3 & 2.0+1.1+4.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}} = \begin{bmatrix} 1.1+0.2 & 1.2+0.1 & 1.3+0.4 \\ 2.1+1.2 & 2.2+1.1 & 2.3+1.4 \\ 3.1+2.2 & 3.2+2.1 & 3.3+2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 10 \\ 7 & 8 & 17 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

(c) $2C - 3E$

$$\underset{2C}{\begin{bmatrix} 6 & -2 & 6 \\ 8 & 2 & 10 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}} + \underset{-3E}{\begin{bmatrix} -6 & 12 & -15 \\ 0 & -3 & -12 \\ -9 & -6 & -3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & -9 \\ 8 & -1 & -2 \\ -5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

(d) $C \cdot B + D$

$$\underset{C}{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}} \cdot \underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2}} = \begin{bmatrix} 3.1+(-1).2+3.3 & 3.0+(-1).1+3.2 \\ 4.1+1.2+5.3 & 4.0+1.1+5.2 \\ 2.1+1.2+3.3 & 2.0+1.1+3.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 21 & 11 \\ 13 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$C \cdot B$ ye $D$ yi ekleme mümkün olsun diye $C \cdot B$ matrisi $3\times 2$, $D$ matrisi $2\times 2$ tipindedir

Subject : Date : ...../...../.....

(e) $AB + D^2$
$(D^2 = D.D)$

$$\underset{AB}{\begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{bmatrix}} + \underset{D^2}{\begin{bmatrix} 5 & -16 \\ 16 & 21 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 19 & -8 \\ 32 & 30 \end{bmatrix}$$

(f) $A(BD)$ ve $(AB)D$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3}} \cdot \left( \underbrace{\underset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times2}} \cdot \underset{D}{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times2}}}_{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 1 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2}} \right) = \begin{bmatrix} 58 & 12 \\ 66 & 13 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$\underset{(A.B)}{\begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{bmatrix}_{2\times2}} \cdot \underset{D}{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times2}} = \begin{bmatrix} 58 & 12 \\ 66 & 13 \end{bmatrix}$$

(g) $A(C+E)$ ve $AC + AE$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}} \cdot \underset{(C+E)}{\begin{bmatrix} 5 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 28 & 8 & 38 \\ 34 & 4 & 41 \end{bmatrix}$$

$$\left( \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 17 & 4 & 22 \\ 18 & 3 & 23 \end{bmatrix}} \right) + \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 11 & 4 & 16 \\ 16 & 1 & 18 \end{bmatrix}} \right) = \begin{bmatrix} 28 & 8 & 38 \\ 34 & 4 & 41 \end{bmatrix}$$

(h) $(A.B)'$ ve $B'A'$

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{bmatrix} \qquad (AB)' = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \longleftrightarrow (A.B)' = B'.A'$$

(i) $(C+E)'$ ve $C' + E'$

$$(C+E)' = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -5 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{C'}{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}} + \underset{E'}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -5 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Subject :

Date :...../...../.....

**Not:** Eğer $A=[a_{ij}]$ $n\times n$ tipinde bir matris ise $A$'nın izi (trace) diyagonaldeki elemanların toplamı olarak tanımlanır:

$$Tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(a) $Tr(c.A)=c.Tr(A)$ $(c\in\mathbb{R})$

$A=[a_{ij}] \Rightarrow c.A=[c.a_{ij}]$ $\quad Tr(cA)=\sum_{i=1}^{n} c.a_{ii}=c.\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}_{Tr(A)} \Rightarrow Tr(c.A)=c.Tr(A)$

(b) $Tr(A)+Tr(B)=Tr(A+B)$

$\left.\begin{array}{l} A=[a_{ij}] \\ B=[b_{ij}] \end{array}\right\} A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$ $\quad Tr(A+B)=\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})=\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}_{Tr(A)}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{ii}}_{Tr(B)}=Tr(A)+Tr(B)$

(c) $Tr(A.B)=Tr(B.A)$ $\quad A.B=C$ , $B.A=D$ $\quad (C=[c_{ij}],\ D=[d_{ij}])$

$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ ve $d_{ij}=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$

$$Tr(C)=\sum_{i=1}^{n} c_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{ki}=\sum_{i=1}^{n} d_{ii}=Tr(D)$$

(İndeksler yer değiştirildi.)

**Not:** $Ax=B$ denklemini birden fazla çözüm varsa, sonsuz tane olduğunu gösteriniz

$x_1$ ve $x_2$ iki çözüm olsun, $r+s=1$ olmak üzere $x_3=rx_1+sx_2$ matrisini düşünelim

$Ax_3=B$ olduğunu gösterelim

$Ax_3=A(rx_1+sx_2)=Arx_1+Asx_2=r(Ax_1)+s(Ax_2)=rB+sB=(r+s)B \Rightarrow Ax_3=B$

olup sonsuz tane çözüm vardır çünkü sonsuz adette $r$ ve $s$ seçilebilir

**Not:** $AB-BA=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ şartını sağlayan $2\times2$ tipinde $A$ ve $B$ matrislerinin bulunmadığını gösteriniz

$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}$

$$AB-BA=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}-(b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}) & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}-(b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}) \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}-(b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}) & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}-(b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{a_{11}b_{11}}+\cancel{a_{12}b_{21}}-\cancel{b_{11}a_{11}}-\cancel{b_{12}a_{21}}=1 \\ \cancel{a_{21}b_{11}}+\cancel{a_{22}b_{21}}-\cancel{b_{21}a_{11}}-\cancel{b_{22}a_{21}}=1 \end{array}\right\} 0=2$$

çelişkisi olduğu için bu formata uygun $A$ ve $B$ matrisleri olamaz

Subject :

Date : ...../...../.....

# Matris İşlemlerinin Cebirsel Özellikleri

1) $A$ ve $B$ $m \times n$ matrisler ise $A+B = B+A$ (değişme)

2) $A$, $B$ ve $C$ $m \times n$ matrisler ise $A+(B+C) = (A+B)+C$

3) $\forall\, {}_mA_n$ için $A + {}_mO_n = {}_mO_n + A = A$ şartını sağlayan bir tek $m \times n$ ${}_mO_n$, tüm elemanları sıfır olan sıfır matrisi vardır ($(m=n) \Rightarrow O_n$)

4) $\forall$ $m \times n$ $A$ matrisi için $A + B = {}_mO_n$ olacak şekilde bir ${}_mB_n$ matrisi vardır ($B = -A$)

5) $A$ $m \times n$, $B$ $n \times p$, $C$ $p \times q$ matrisler ise $A(BC) = (AB)C$

6) a) $A$ ve $B$ $m \times n$, $C$ $n \times q$ matrisler ise $(A+B)C = AC + BC$

b) $C$ $m \times n$, $A$ ve $B$ $n \times q$ matrisler ise $C(A+B) = CA + CB$

7) $r, s \in \mathbb{R}$, $A$ $m \times n$ matris ve $B$ $n \times q$ matris ise

a) $r(sA) = (rs)A = s(rA)$

b) $A(rB) = r(AB)$

8) $a, b \in \mathbb{R}$, $A$ $m \times n$ matris ise $(a+b)A = aA + bA$

9) $a \in \mathbb{R}$, $A$ ve $B$ $m \times n$ matrisler ise $a(A+B) = aA + aB$

10) $A$ $m \times n$ matris ise $(A')' = A$

11) $A$ ve $B$ $m \times n$ matrisler ve $c \in \mathbb{R}$ ise

a) $(cA)' = c.A'$

b) $(A+B)' = A' + B'$

12) $A$ $m \times n$, $B$ $n \times p$ matris ise $(AB)' = B'A'$

İspat

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ ve $A.B = C = [c_{ij}]$ olsun $c_{ij}$ nin $B'A'$ daki $(i,j)$ elemanı olduğu ispatlanırsa eşitlik sağlanır

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a'_{kj} b'_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj} \quad B'A' \text{ daki } (i,j) \text{ elemanı}$$

Subject :

Date :...../...../.....

**Not:** Eğer a ve b iki sayı ise $a.b=0$ olması için $a=0$ veya $b=0$ olmalıdır.

Bu kural matrisler için geçerli değildir yani iki matrisin çarpımının sıfır matris sonucu olması için kesinden en az birinin sıfır matris olmasına gerek yoktur. Örneğin;

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}4 & -6\\ -2 & 3\end{bmatrix}, \quad A.B=\begin{bmatrix}1.4+2(-2) & 1(-6)+2.3\\ 2.4+4.(-2) & 2(-6)+4.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

**Not:** a, b, c üç tane reel sayı olsun. $ab=ac$ ve $a\neq 0$ ise $b=c$ dir.

Bu sadeleştirme matrisler için geçerli değildir. Örneğin;

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix} \qquad A.B=\begin{bmatrix}1.2+2.3 & 1.1+2.2\\ 2.2+4.3 & 2.1+4.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 5\\ 16 & 10\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 5 & -1\end{bmatrix} \qquad A.C=\begin{bmatrix}1.(-2)+2.5 & 1.3+2(-1)\\ 2.(-2)+4.5 & 2.3+4.(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 5\\ 16 & 10\end{bmatrix}$$

$AB=AC$, $B\neq C$

**Örnek:** Sıfırdan farklı bir A matrisi bulunuz ki (2x2 tipinde) $A^2=A.A=O_2$ olsun

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}}.\underset{A}{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}a_{11}.a_{11}+a_{12}.a_{21} & a_{11}.a_{12}+a_{12}.a_{22}\\ a_{21}.a_{11}+a_{22}.a_{21} & a_{21}.a_{12}+a_{22}.a_{22}\end{bmatrix}$$

1) $a_{11}^2+a_{12}.a_{21}=0$

2) $a_{12}(a_{11}+a_{22})=0$

3) $a_{21}(a_{11}+a_{22})=0$

4) $a_{11}^2+a_{12}.a_{21}=0$

1. Durum: $a_{11}+a_{22}\neq 0$ varsayalım, eğer bu toplam "0" değilse $a_{12}=0$ ve $a_{21}=0$ olmalı ancak denklemde yerine konulduklarında sıfır matris elde edeceğiz o halde bu varsayım hatalıdır.

2. Durum: $a_{11}+a_{22}=0 \Rightarrow$ köşegen toplamı (izi) "0" olmalıdır. $a_{22}=-a_{11}$ olmak üzere denklemlerden $a_{21}=-a_{11}^2/a_{12}$ olarak bulunur. O halde sıfırdan farklı 2x2 tipinde A matrisi

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ -\dfrac{a_{11}^2}{a_{12}} & -a_{11}\end{bmatrix}$$ formatında olmalıdır.

Örneğin: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1/2 & -1\end{bmatrix}$

Subject:

Date: ...../...../.....

Örnek: $\forall$ 2x2 B matrisi için $AB=BA$ şartını sağlayan bütün A matrislerini belirleyiniz

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} \end{bmatrix}}_{A.B} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11}\cdot a_{11}+b_{12}\cdot a_{21} & b_{11}\cdot a_{12}+b_{12}\cdot a_{22} \\ b_{21}\cdot a_{11}+b_{22}\cdot a_{21} & b_{21}\cdot a_{12}+b_{22}\cdot a_{22} \end{bmatrix}}_{B.A}$$

$\cancel{a_{11}\cdot b_{11}}+a_{12}\cdot b_{21}=\cancel{b_{11}\cdot a_{11}}+b_{12}\cdot a_{21}$ ①

$a_{12}\cdot b_{21}=b_{12}\cdot a_{21}$

$\cancel{a_{11}\cdot b_{12}}+a_{12}\cdot b_{22}=b_{11}\cdot a_{12}+\cancel{b_{12}\cdot a_{22}}$ ②

$b_{12}(a_{11}-a_{22})=a_{12}(b_{11}-b_{22})$

$a_{21}\cdot b_{22}+\cancel{a_{22}\cdot b_{21}}=b_{21}\cdot a_{22}+\cancel{b_{22}\cdot a_{21}}$ ④

$a_{21}\cdot b_{22}=b_{21}\cdot a_{22}$

$\cancel{a_{21}\cdot b_{11}}+a_{22}\cdot b_{21}=b_{21}\cdot a_{11}+\cancel{b_{21}\cdot a_{21}}$ ③

$a_{21}(b_{11}-b_{22})=b_{21}(a_{11}-a_{22})$

$a_{11}=a_{22}$ ve $a_{12}=a_{21}=0$ olmalıdır ki tüm B (2x2 tipindeki) matrisler için sağlansın

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A=\lambda I \Big\} \begin{matrix} a_{11}=a_{22}=\lambda \\ \lambda\in\mathbb{R} \end{matrix}$$

# Özel tipteki matrisler

- $n\times n$ $A=[a_{ij}]$ için $i\neq j$ için $a_{ij}=0$ ise bunlara diyagonal matrislerdir

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$i\neq j$ diyagonal matris değil

- $A^p=\underbrace{A\cdot A\cdot A\cdots A}_{p \text{ adet}}$, $A=r.I_n$ ($n\times n$ A, $A^p=I_n$)

- Negatif olmayan p ve q için $A^p.A^q=A^{p+q}$ $\quad (A^p)^q=A^{p.q}$

Tanım: $n\times n$ tipinde bir $A=[a_{ij}]$ matrisinde $i>j$ için $a_{ij}=0$ ise o matrise üst üçgen matris denir $i<j$ iken $a_{ij}=0$ ise alt üçgensel matris denir

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Subject :

Date :...../...../.....

**Tanım:** A bir matris olsun $A' = A$ ise A'ya simetrik matris denir

$A' = -A$ ise A'ya anti-simetrik matris denir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

simetrik matris

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

köşegen daima sıfır

anti-simetrik matris

- A simetrik veya anti-simetrik ise A kare matristir
- A simetrik bir matris ise onun elemanları ana diyagonale göre simetrikdir
- A simetrik ise $a_{ij} = a_{ji}$ ; A anti-simetrik ise $a_{ij} = -a_{ji}$
- A anti-simetrik ise ana diyagonaldeki elemanların hepsi sıfırdır.

**Örnek:** A nxn matris ve S bir simetrik matris ve K bir anti-simetrik matris olmak üzere; $A = S + K$ şeklinde yazılabilir ayrıca bu yazım tek türlüdür

$$A = S + K$$

$$A' = \underbrace{S'}_{\text{simetrik}} + \underbrace{K'}_{\text{anti-simetrik}}$$

$$A' = S - K$$

$$A = S + K$$

$$A' = S - K$$

$$A + A' = 2S$$

$$S = \frac{A + A'}{2}$$

$$A = S + K$$

$$-A' = S - K$$

$$A - A' = 2K$$

$$K = \frac{A - A'}{2}$$

$$S + K = \frac{A + A'}{2} + \frac{A - A'}{2} = A \Rightarrow A = S + K$$

**Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{A + A'}{2} = S = \begin{bmatrix} 1 & 7/2 & 3/2 \\ 7/2 & 6 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 3/2 \end{bmatrix} \qquad \frac{A - A'}{2} = K = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -7/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 7/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Subject : Date :...../...../.....

**Tanım:** Bir $m \times n$ $A = [a_{ij}]$ matrisinin bazı satır veya/ve sütunlarını silerek elde edilen matrise A'nın **alt matrisi** denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

**Örnek:**

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right] \qquad A = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{13} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} \end{bmatrix}$$

**Örnek:** $Ax = B$ $[A \mid B]$ parçalı matris

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ \hline b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} B_{11} + \hat{A}_{12} B_{21} + \hat{A}_{13} B_{31} & \hat{A}_{11} B_{12} + \hat{A}_{12} B_{22} + \hat{A}_{13} B_{32} \\ \hline \hat{A}_{21} B_{11} + \hat{A}_{22} B_{21} + \hat{A}_{23} B_{31} & \hat{A}_{21} B_{12} + \hat{A}_{22} B_{22} + \hat{A}_{23} B_{32} \end{array}\right]$$

## Singüler ve singüler olmayan matrisler (non-singüler)

A $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $AB = BA = I_n$ şartını sağlayan B, $n \times n$ tipinde matris varsa A'ya singüler olmayan matris (tersinir yani ters alınabilen matris) denir. Aksi halde singüler (ters alınamayan) matris denir. A'nın ters matrisi $A^{-1}$ ile gösterilir.

**Örnek:** $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Subject :

Date :...../...../.....

Örnek:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

singular olmayan

$a+2c=1 \quad b+2d=0 \quad 3a+4c=0 \quad 3b+4d=1 \Big\} \; a=-2 \quad b=1 \quad c=3/2 \quad d=-1/2$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2 \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

singular

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Bigg\} \begin{matrix} a+2c=1 & b+2d=0 \\ 2a+4c=0 & 2b+4d=1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 \neq 0 \\ A^{-1} \text{ yoktur} \end{matrix}$$

**Tanım:** A ve B singular olmayan $n \times n$ matrisler ise AB matrisi de singular değildir $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$A \cdot B \, (B^{-1} A^{-1}) = A \, \underbrace{(B \cdot B^{-1})}_{I_n} A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1} A^{-1}) \, A \cdot B = B^{-1} I_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$$

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ singular olmayan matrisler ise $A_1, A_2, \dots, A_r$ matrisleri de singular değildir

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_r)^{-1} = A_r^{-1} \cdot A_{r-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1}$$

**Tanım:** A singular olmayan bir matris ise $A^{-1}$ matrisi de singular olmayan matrisdir $(A^{-1})^{-1} = A$

$$(A^{-1}) \cdot A = I_n \qquad A \, A^{-1} = I_n$$

$$(A^{-1} \cdot A)^{-1} = I_n^{-1} \Rightarrow A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = I_n \qquad A^{-1} \, (A^{-1})^{-1} = A^{-1} \cdot A \qquad (A^{-1})^{-1} = A$$

**Tanım:** A singular değilse $A'$ de singular değildir ve $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ dir

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$(A \cdot A^{-1})' = (A^{-1})' \cdot A' = I_n' \qquad A' \, (A^{-1})' = I_n' = I_n$$

$$(A^{-1})' \cdot A' = I_n \qquad (A')^{-1} = (A^{-1})'$$

Subject : Date :...../...../.....

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$(A')^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = (A^{-1})'$$

# Ödev

A simetrik ise ve singüler değilse, $A^{-1}$'nde simetrik olduğunu gösterin

$A' = A$ $(A^{-1})' = (A')^{-1}$

$(A^{-1})' = A^{-1}$

Örnek: A singüler olmasın $AB = AC \Rightarrow B = C$ olduğunu gösterin. Ayrıca $AB = O_n \Rightarrow B = O_n$

$$\left.\begin{aligned} AB = AC &\Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{I_n} B = B \\ &\Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{I_n} C = C \end{aligned}\right\} B = C$$

$$AB = O_n \Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{I_n} B = O_n$$

$$B = O_n$$

# Lineer sistemler ve matrisin tersi

A matrisi $n \times n$ $Ax = B$ $\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{I_n} x = A^{-1}B$ $x = A^{-1}B$

# Bir matrisin eşolan formu

Bir matrisi $n \times n$ tipinde aşağıdaki dört özelliği sağlıyorsa bu matrise indirgenmiş satır eşolan formdadır denir

satır eşolan form

a) Bütün elemanları "0" olan satır varsa matrisin en alt kısmındadır

b) Tamamı "0" olmayan bir satırdaki "0" olmayan ilk sayı (baş eleman) 1'dir

c) Eğer i ve (i+1) satırlar art arda ve tamamı "0" olmayan iki satır ise (i+1) satırın baş elemanı, i satırın baş elemanın sağındadır

d) Eğer bir kolon bir satırın baş elemanına tutulur ediyorsa o kolondaki diğer tüm elemanlar "0"dır

indirgenmiş satır eşolan form

Subject : Date :...../...../.....

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

satır eşolon

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

satır eşolon

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

indirgenmiş satır eşolon

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

indirgenmiş satır eşolon

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

indirgenmiş satır eşolon

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Satır eşolon

Tanım: Aşağıdaki işlemlerin her birine bir elementer satır (sütun) işlemi denir.

1. tip: $A_{n\times n}$ $i$ ve $j$ satırlarını (sütunlarını) yer değiştirme $S_i \longleftrightarrow S_j$

2. tip: $A_{n\times n}$ $i$. satırını (sütununu) bir $c \neq 0$ ile çarpma $S_i \longrightarrow c S_i$

3. tip: $A_{n\times n}$ $i$ satırının (sütununun) $c$ katını $j$. satıra (sütuna) ekleme $(i \neq j)$ $S_j \longrightarrow c S_i + S_j$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 6 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow (\frac{1}{3}) S_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \to (-2) S_1 + S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

satır eşolon form

Tanım: Eğer bir $B$ $n\times n$ matrisi $A$ matrisine sonlu sayıda elementer satır (sütun) işlemlerinin uygulanmasıyla elde edilebilyorsa $A$ matrisi $B$ matrisinin satır (sütun) eşdeğeridir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 \to 2S_3 + S_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow 2S_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Subject : Date :...../...../.....

a) Her matris kendisinin satır eşdeğeridir

b) A, B'nin satır eşdeğeri ise B de A'nın satır eşdeğeridir

c) A, B'nin; B de C'nin satır eşdeğeri ise A da C'nin satır eşdeğeridir

**Teorem:** Her $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ sıfır olmayan matrisi satır (sütun) eşolan formdaki bir matrise satır (sütun) eşdeğerdir

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[S_4 \to (-2)S_1 + S_4]{S_1 \to \frac{1}{2} S_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2 \leftrightarrow \frac{1}{2} S_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_4 \to 2S_2 + S_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_4 \to (-1)S_3 + S_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 \to \frac{1}{2} S_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

**Teorem:** $m \times n$ tipinde her $A = [a_{ij}]$ sıfır olmayan matris indirgenmiş satır (sütun) eşolan formdaki bir matrise satır (sütun) eşdeğerdir

Örnek:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \to S_1 - S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[S_1 \to S_1 - 4S_3]{S_2 \to S_2 - \frac{1}{2} S_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & 19/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Subject :

Date :...../...../.....

**Tanım:** $Ax=B$ ve $Cx=D$, $m$ denklemli ve $n$ bilinmeyenli iki lineer sistem olsun eğer $[A \,\vdots\, B]$, $[C \,\vdots\, D]$ ek matrisleri satır eşdeğer ise bu lineer sistemler eş sistemlerdir

# Gauss ve Gauss-Jordan İndirgeme Metodları

Bir lineer sistemin ek matrisi $[A \,\vdots\, B]$'yi satır eşelon forma getirme yöntemine **Gauss indirgeme yöntemi**, indirgenmiş satır eşelon forma getirme yöntemine de **Gauss-Jordan indirgeme yöntemi** denir

**Örnek:**

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 \qquad - x_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[S_3 \to S_3 - 3S_1]{S_2 \to S_2 - 2S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 \to S_2/-5} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_3 \to S_3 + 6S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3 \to S_3/-4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}\right\} \quad x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3$$

**Örnek:**

$$[C \,\vdots\, D] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1 \quad \text{ç.k.} = \emptyset$$

**Örnek:**

$$[C \,\vdots\, D] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \quad \Big\} \quad x_1 = 5,\ x_2 = 6,\ x_3 = 7,\ x_4 = 8$$

Subject : Date :...../...../.....

Örnek:

$$[C \mid D] = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & -5/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 \quad - 5/2\, x_5 &= 3/2 \\ + x_4 + 1/2\, x_5 &= 1/2 \end{aligned}$$

bağımlı değişken

$x_1 = \frac{3}{2} - x_2 - 2x_3 + \frac{5}{2}x_5$

$x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_5$

bağımlı değişken

$\left.\right\}$ $x_2 = r$, $x_3 = s$, $x_5 = t$

$x_1 = \frac{3}{2} - r - 2s + \frac{5}{2}t \qquad x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$

Örnek:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}\right\} [A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[S_3 \to S_3 - 3S_1]{S_2 \to S_2 - 2S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{array}\right] \xrightarrow{\left(-\frac{1}{5}\right)S_2 \to S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_3 \to S_3 + 7S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3 \to \frac{1}{10}S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Bigg\} \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Gauss yöntemi

$$\xrightarrow{S_1 \to S_1 - 2S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[S_2 \to S_2 - 2S_3]{S_1 \to S_1 + S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Gauss - Jordan yöntemi

# Homojen Sistemler

m denklem n tane bilinmeyenden oluşan $Ax = 0$ homojen sistemi

Örnek:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$x_1 + 2x_5 = 0 \quad x_1 = -2r$

$x_3 + 3x_5 = 0 \quad x_3 = -3r$

$x_4 + 4x_5 = 0 \quad x_4 = -4r$

$x_2$ ve $x_5$ bağımsız değişken

$x_2 = s \quad x_5 = r$

$x_1 = -2r,\ x_2 = s,\ x_3 = -3r,\ x_4 = -4r,\ x_5 = r$

Subject : Date :...../...../.....

**Not:** Denklem sayısı bilinmeyen sayısından az ise parametrik olacak şekilde sonsuz çözüm vardır.

**Not:** Bir homojen lineer sistemde en az bir tane çözüm vardır (Hepsinin "0" olması)

**Teorem:** m denklemli n bilinmeyenli bir homojen sistemde eğer $m<n$ ise bu sistemin her zaman bir trivial (açık/aşikar) olmayan bir çözümü vardır.

**Sonuç:** A $m\times n$ matris ve $Ax=0$ ın sadece trivial çözümü varsa $m\geq n$ dir

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=0\\ x_1+\qquad\quad+x_4&=0\\ x_1+2x_2+x_3\qquad&=0\end{aligned}\right\}\quad\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\1&0&0&1&0\\1&2&1&0&0\end{array}\right]$$

$(r\in\mathbb{R})$

$x_4=r$

$x_1=-r \quad x_2=r \quad x_3=-r$

**Not:** Eğer $n\times n$ A matris indirgenmiş satır eşelon formda ise $A\neq I_n$ ise $A_{nn}$ tamamı sıfır olmayan bir satırı vardır

**Sınav sorusu:** a'nın hangi değerleri için;

a) Hiç çözüm yoktur

$a=-2$

b) Tek çözüm vardır

$a\neq-2$ veya $a\neq2$

c) Sonsuz sayıda çözüm vardır?

$a=2$

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2-x_3&=2\\ x_1+2x_2+x_3&=3\\ x_1+x_2+(a^2-5)x_3&=a\end{aligned}\right\}\quad\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\1&2&1&3\\1&1&a^2-5&a\end{array}\right]\xrightarrow{S_2\to S_2-S_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\1&2&1&3\\0&0&(a^2-4)&(a-2)\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_2\to S_2-S_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\0&1&2&1\\0&0&(a^2-4)&(a-2)\end{array}\right]$$

$$a=2\quad\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\qquad\qquad a=-2\quad\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\\0&1&2&1\\0&0&0&-4\end{array}\right]$$

Sonsuz çözüm vardır

hiç çözüm yoktur

Subject : Date :...../...../.....

# Ödev

**a)**
$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a^2-1)x_3 &= (a+1) \end{aligned}\right\} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & (a^2-1) & (a+1) \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[S_3 \to S_3 - 2S_1]{S_2 \to S_2 - 2S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & (a^2-3) & (a-3) \end{array}\right] \xrightarrow{S_3 \to S_3 - S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (a^2-3) & (a-4) \end{array}\right]$$

1) $a^2-3=0$ ve $a-4 \neq 0$ $\Rightarrow$ $a = \pm\sqrt{3}$ için çözüm yoktur

2) $a^2-3 \neq 0$, $a \neq \pm\sqrt{3}$ ise sistemin tek bir $(x_1, x_2, x_3)$ çözümü vardır

3) $a^2-3=0$ ve $a-4=0$ aynı anda sağlanmadığı için sonsuz çözüm üreten bir $a$ değeri yoktur

**b)**
$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + (a^2-9)x_2 &= a \end{aligned}\right\} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & (a^2-9) & a \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 \to S_2 - S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & (a^2-9) & (a-3) \end{array}\right]$$

1) $a^2-9=0$ ve $a-3 \neq 0$ $\Rightarrow$ $a=-3$ için çözüm yoktur

2) $a \neq \pm 3$ için sistemin tek bir $(x_1, x_2)$ çözümü vardır

3) $a^2-9=0$ ve $a-3=0$ için $a=3$ olmalı ve bu sonsuz çözüm üretir

**c)**
$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + (a^2-5)x_3 &= a \end{aligned}\right\} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & (a^2-5) & a \end{array}\right] \xrightarrow[S_3 \to S_3 - S_1]{S_2 \to S_2 - S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (a^2-6) & (a-2) \end{array}\right]$$

1) $a^2-6=0$, $a=\pm\sqrt{6}$ için çözüm yoktur

2) $a \neq \pm\sqrt{6}$ için tek bir $(x_1, x_2, x_3)$ çözümü vardır

3) $a^2-6=0$ ve $a-2=0$ aynı anda sağlanmadığı için sonsuz çözüm yoktur

Subject :

Date :...../...../.....

# Elementer matrisler ve $A^{-1}$'nin bulunması

$I_n$ birim matrisine I. tip, II. tip ve III. tip bir elementer satır veya sütun işlemini sadece bir defa uygulanmasıyla elde edilen bir nxn A matrisine; sırasıyla ile I. tip, II. tip ve III. tip elementer matris denir.

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ I. tip elementer matris $I_3 \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} E_1$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ II. tip elementer matris $I_3 \xrightarrow{S_2 \to (-2)S_2} E_2$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ III. tip elementer matris $I_3 \xrightarrow{S_1 \to 2S_2 + S_1} E_3$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ III. tip elementer matris $K_3 \xrightarrow{K_1 \to 3K_3 + K_1} E_4$

**Tanım:** A nxn bir matris olsun. A üzerinde I. tip, II. tip veya III. tip bir elementer satır (sütun) işlemi yapılarak bir B matris elde edilmiş olsun. E matrisi de $I_m$'ye (B'ye) aynı elementer satır (sütun) işlemi uygulayarak elde edilen matris olsun o zaman;

$$\underbrace{B = EA}_{B = E_m A_{m \times n}} \qquad \underbrace{(B = AE)}_{B = A_{m \times n} E_n}$$

Subject : Date :...../...../.....

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \to S_1 - 2S_2} \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \to S_1 - 2S_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times4} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Teorem:** A ve B $m\times n$ matrisler olsun $A_{m\times n}$ B'ye satır (sütun) eşdeğer olması için gerek ve yeter şart $E_1, E_2, \dots, E_k$ elementer matrisler olmak üzere $B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$ şeklinde olmasıdır ($B = A E_1 E_2 \dots E_k$ şeklinde olmasıdır)

**Teorem:** Elementer matris olan E matrisi singüler değildir (ters alınabilir) ve tersi de aynı tipte bir elementer matrisdir

**Teorem:** A $n\times n$ bir matris olsun $Ax=0$ homojen sisteminin tek çözümü $x=0$ olsun (trivial - aşikar çözüm) o zaman A matrisi $I_n$'in satır eşdeğeridir

**Teorem:** A singüler değildir $\Leftrightarrow$ A elementer matrislerin çarpımıdır

$\Leftarrow$ $A = E_1 E_2 \cdots E_k$ olsun $E_i$'ler singüler değildir O halde $E_1 E_2 \cdots E_k$ da singüler değildir. Eğer bu singüler değilse A da singüler değildir

$\Rightarrow$ A singüler olmasın bu durumda $Ax=0$ fak. $A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 \Rightarrow I_n x = 0 \Rightarrow x = 0$

$Ax=0$ homojen sisteminin SADECE trivial (aşikar) çözümü vardır A $I_n$'in satır eşdeğeridir

O halde $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$ matrisleri vardır ki $I_n = E_k \cdots E_1 A$ dır.

$I_n = E_k \cdots E_1 A \Rightarrow A = (E_k \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$ $E_i^{-1}$'ler elementer matrisler

Örnek:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 \to S_2 - 2S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ &\downarrow \\ &r \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= -2r \\ x_2 &= r \end{aligned} \ (r \in \mathbb{R}) \Big\} \text{ Sonsuz çözüm parametre olan}$$

Subject : Date : ...../...../.....

**Teorem:** $n$ derecelerli $n$ bilinmeyenli $Ax=0$ homojen sisteminin trivial olmayan bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart $A$'nın tersinir olmaması

**Not:** $A$ $n\times n$ matris ise aşağıdakiler birbirine denktir

1) $A$ singüler matris değildir
2) $Ax=0$ ın sadece trivial çözümü vardır
3) $A$, $I_n$ nin satır (sütun) eşdeğeridir
4) $Ax=B$ lineer sisteminin her $n\times 1$ $B$ matrisi için tek çözümü vardır
5) $A$ elementer matrislerin bir çarpımıdır

$$A = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} \qquad A^{-1} = E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1$$

$$(E_k E_{k-1} \cdots E_1)\,[A \mid I_n] = [A \mid E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1] = [I_n \mid A^{-1}]$$

$$[A \mid I_n] \Rightarrow [I_n \mid A^{-1}]$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad [A \mid I_n] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_3 \to S_3 - 5S_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[S_3 \leftrightarrow (-\frac{1}{4})S_3]{S_2 \leftrightarrow (\frac{1}{2})S_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{S_1 \to S_1 - S_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1 \to S_1 + \frac{1}{2}S_3]{S_2 \to S_2 - \frac{3}{2}S_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/4 & 13/8 & -1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -15/8 & 1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A^{-1}}$$

Subject :

Date :...../...../.....

**Teorem:** $n \times n$ A matrisi singüler $\Leftrightarrow$ A matrisi bir satır sıralı olan bir B matrisine eşdeğerdir

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad [A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[S_3 \to S_3 - 5S_1]{S_2 \to S_2 - S_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[S_3 \to S_3 + 12S_2]{\substack{S_1 \to S_1 - 2S_2 \\ S_2 \to (-\frac{1}{4})S_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

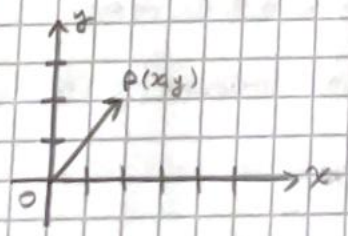
# Eşdeğer matrisler

A ve B $m \times n$ matris olsun. Eğer B'yi A'ya sonlu sayıda elementer satır ve/veya sütun işlemi uygulayarak elde edebilirsek A matrisinin B'nin eşdeğer matrisi denir (A, B'ye eşdeğerdir)

**Teorem:** $n \times n$ A matrisi singüler değil $\Leftrightarrow$ A, $I_n$'e eşdeğerdir

# Düzlemde vektörler

Bir büyüklük, bir yön ile ifade edilyorsa böyle büyüklüklere vektör denir. Sadece büyüklük olarak ifade ediliyorsa o zaman böyle büyüklüklere skaler denir




P düzlemde bir P noktası

$\xleftrightarrow{\text{1-1 eşleme}}$

$(x,y)$ ikilisi $(x,y \in \mathbb{R})$

$$\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \alpha_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$$

$\mathbb{R}^2$ boyutludur

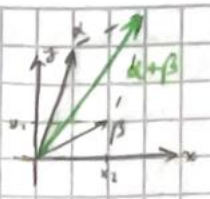
$$\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\text{1-1 eşleme}} P(x,y) \xleftrightarrow{\text{1-1 eşleme}} \overrightarrow{OP}\ (O(0,0), P(x,y))$$

Subject :

Date :...../...../.....

# Toplama

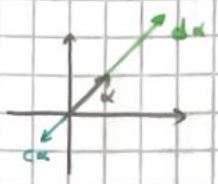
$$\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha + \beta \quad \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$




# Skaler ile çarpım

$$\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow c.\alpha = \begin{bmatrix} cx \\ cy \end{bmatrix}$$

$c > 0$ (yön aynı)
$c < 0$ (yön ters)




# Çıkarma

$$\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$\alpha - \beta \longrightarrow$

# Vektör uzayları ve alt uzaylar

Üzerinde vektör toplam $\oplus$ ve vektör çarpım $\odot$ işlemleri tanımlı olan bir $V$ kümesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $V$ye bir reel (gerçel) vektör uzay denir

a) $\alpha, \beta \in V$ iken $\alpha \oplus \beta \in V$ dir ($V$, $\oplus$ işlemine göre kapalıdır)

1) $\forall \alpha, \beta \in V$ iken $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$

2) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$ için $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$

3) $\forall \alpha \in V$ için $\alpha \oplus \theta = \theta \oplus \alpha = \alpha$ şartını sağlayan bir tek $\theta \in V$ vardır

4) $\forall \alpha \in V$ için $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha = \theta$ şartını sağlayan bir tek $\beta \in V$ vardır. Bu elemana $\alpha$ nın negatifi /$\alpha$ nın tersi denir ($-\alpha$ ile gösterilir)

b) $\forall \alpha \in V$ ve $c \in \mathbb{R}$ için $c \odot \alpha \in V$ dir

5) $c \odot (\alpha \oplus \beta) = (c \odot \alpha) \oplus (c \odot \beta)$ ($\forall \alpha, \beta \in V$ için $c \in \mathbb{R}$ için)

6) $(c + d) \odot \alpha = (c \odot \alpha) \oplus (d \odot \alpha)$ ($\forall \alpha \in V$ ve $c, d \in \mathbb{R}$ için)

7) $c \odot (d \odot \alpha) = (c d) \odot \alpha$ ($\forall \alpha \in V$ ve $c, d \in \mathbb{R}$ için)

8) $1 \odot \alpha = \alpha$ ($\forall \alpha \in V$ için)

Subject :  Date :...../...../.....

Örnek: $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, $n \times 1$ reel değerli matris $R^n$

$[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_m] \longrightarrow R_m$

Örnek: $m \times n$ tipinde ${}_mR_n$ bir vektör uzaydır

Örnek: Reel sayılar kümesinde bilinen toplama ve çarpma işlemi

$x \oplus y = x + y$ , $c \odot x = cx$

Örnek: $R_n$ $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ $1 \times n$ , $\oplus$ matris toplamı, $\odot$ matrisin skaler çarpımını gösterin $R_n$ bir vektör uzaydır

Örnek: $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ fonksiyonuna ($t$ cinsinden) bir polinom denir $a_n \neq 0$ ise $p(t)$'nin derecesi $n$ dir

$P_n = \{$ derecesi $< n$ olan polinomlar $\}$

$P_0 = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0$ $\oplus$ polinomlarda toplama işlemi $\odot$ polinomlarda çarpma işlemi

Örnek: Derecesi $n$'e eşit olan polinomlar kümesi ; $\oplus$ polinomlarda toplama, $\odot$ polinomlarda çarpma işlemlerine göre bir vektör uzay oluşturur mu?

$P_n = \{$ der $(P_n) = n$ olan polinomlar $\}$

$P_1(t) = -t^2 + 2t + 4$ $P_2(t) = t^2 - 3t + 7$ $P_1(t) + P_2(t) = -t + 11 \longrightarrow$ der $[P_1(t) + P_2(t)] = 1$

$\rightarrow$ bir vektör uzay oluşturmaz

Örnek: $V$ ile $\mathbb{R}$'de tanımlı ve reel değerli sürekli fonksiyonların kümesini gösterelim

$f, g \in V$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f \oplus g$ , $c \odot f$

$f \oplus g = f + g$ , $c \odot f(x) = c f(x)$ $V$ bir vektör uzaydır ve $c \in (-\infty, \infty)$

Örnek: $V = \mathbb{R}$ olan $\alpha \oplus \beta = \alpha - \beta$ ve $c \odot \alpha = c\alpha$ olan $V$ bir vektör uzay mıdır?

$\alpha \oplus \beta \neq \beta \oplus \alpha$ $\alpha - \beta \neq \beta - \alpha$ her zaman sağlanmaz , vektör uzay değildir

Subject : Date :...../...../.....

**Örnek:** V kümesi $(x, y, z)$ sıralı üçlülerinden oluşan bir küme olsun $(x, y, z \in \mathbb{R})$

$(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x', y+y', z+z')$ ve $c \odot (x, y, z) = (cx, cy, cz)$ ise eğer

$(x, y, z) \oplus (x', y', z') \neq (x', y', z') \oplus (x, y, z)$

$(x', y+y', z+z') \neq (x, y+y', z')$ → vektör uzay değil

**Örnek:** $V = \mathbb{Z}$ $\oplus, \odot$ bilinen toplama ve çıkarma işlemleri olsun V bir vektör uzay mıdır?

$c = \sqrt{3}$ ve $x = 1$ için örneğin $\sqrt{3} \odot 1 = \sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$ → vektör uzay değil
$(c \in \mathbb{R})$

25.03.26

**Teorem:** V bir vektör uzay olsun;

a) $\forall \alpha \in V$ için $0 \odot \alpha = \theta$

b) $\forall c \in \mathbb{R}$ için $c \odot \theta = \theta$

c) $c \odot \alpha = \theta$ ise o zaman ya $c = 0$ ya da $\alpha = \theta$ dır

d) $\forall \alpha \in V$ için $(-1) \odot \alpha = -\alpha$

a-ispat) $0 \odot \alpha = (0+0) \odot \alpha = (0 \odot \alpha) \oplus (0 \odot \alpha)$ $\quad -(0 \odot \alpha)$ eklendi

$-0 \odot \alpha \oplus 0 \odot \alpha = (0 \odot \alpha) \oplus [(0 \odot \alpha) \oplus (0 \odot \alpha)]$

$\underbrace{(-0 \odot \alpha) \oplus (0 \odot \alpha)}_{\theta} = [(-0 \odot \alpha) \oplus (0 \odot \alpha)] \oplus (0 \odot \alpha)$

$\theta = \theta \oplus (0 \odot \alpha) \oplus (0 \odot \alpha) \Rightarrow \theta = 0 \odot \alpha$

b-ispat) $\forall c \in \mathbb{R}$ $c \odot \theta = \theta$ $\quad c \odot \theta = c \odot (0 \odot \alpha) = (c \cdot 0) \odot \alpha \Rightarrow 0 \odot \alpha = \theta$

# Alt uzaylar

V bir vektör uzay ve $W \subseteq V$ olsun. Eğer W, V deki işlemlere göre bir vektör uzay oluşturuyorsa W ya V nin **vektör alt uzayı** denir

**Teorem:** V, $\oplus, \odot$ işlemleri ile bir vektör uzay ve $\emptyset \neq W \subseteq V$ olsun W nun V nin alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartların sağlanmasıdır

$(\forall \alpha, \beta \in W,\ c \in \mathbb{R}$ için$)$

a) $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha \oplus \beta \in W$ $\qquad$ b) $c \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \in W \Rightarrow c \odot \alpha \in W$

Subject : Date :...../...../.....

**Ispat ($\Rightarrow$):** $W \subseteq V$ alt vektör uzayı olsun $W$'nin bir vektör uzayı olması nedeniyle

$\alpha, \beta \in W$ için $\alpha \oplus \beta \in W$ olur $c \in \mathbb{R}$, $\alpha \in W$ için $c \odot \alpha \in W$.

**($\Leftarrow$):** a ve o koşulları sağlansın $(-1) \odot \alpha \in W$ ($\forall \alpha \in W$ için)

a dan dolayı, $\alpha \oplus (-1) \odot \alpha \in W$. $\alpha \oplus (-1) \odot \alpha = \alpha \oplus (-\alpha) = \theta$ $\theta \in W$

$\alpha \oplus \theta = \alpha$ dır $\forall \alpha \in V$ için $(-1) \odot \alpha = -\alpha \in W$ olur $W \subseteq V$. $W$ bir alt vektör uzaydır

**Örnek:** Her vektör uzayının en az iki tane alt uzayı vardır. $\{\emptyset\}$ ve kendisi

**Örnek:** $P_2 = \{$derecesi $\leq 2\}$ olan polinomlar olsun $P_2 \subseteq P$ $P_2$, $P$'nin bir alt uzayı midir?

$P_2$, $P$'nin alt uzayıdır.

**Örnek:** $P_{2,1} = \{$derecesi 2 olan polinomlar$\}$ olsun

$P_{2,1}$ $P$'nin alt kümesidir ancak $P_{2,1}$ $P$'nin bir alt uzayı değildir

Örneğin: $(2t^2 + 3t + 1) \in V$ ve $(-2t^2 + t + 2) \in V \Rightarrow (4t + 3) \notin P_{2,1}$

**Örnek:** $W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ olsun

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_1+b_1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1+b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha + \beta = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_1+a_2+b_1+b_2 \end{bmatrix}$$

$c \in \mathbb{R}$ için

$$c \odot \alpha = \begin{bmatrix} c\,a_1 \\ c\,a_2 \\ c(a_1+a_2) \end{bmatrix} \in W$$ Alt (vektör) uzay

# Determinant Var

**Tanım:** $S = \{1, 2, \dots, n\}$ 1'den n'e kadar kadar tam sayıların artan bir sırada düzenlenmiş kümesi olsun $S$'deki elemanların $j_1, j_2, j_3, \dots, j_n$ şeklinde bir düzenlenmesine $S$ nin permütasyonu denir

$S$'nin bir permütasyonu $S \to S$ ya 1-1 ve örten dönüşümdür

$$n \quad n-1 \quad n-2 \quad \cdot \quad \cdot \quad 2 \quad 1 \Rightarrow n!$$

**Örnek:** $S = \{1, 2, 3\}$ olsun $3! = 6$

$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$, $\{3, 2, 1\}$

Subject : Date :...../...../.....

**Tanım:** Eğer $j_1, j_2, \dots j_n$ permütasyonunda büyük bir sayı küçük bir sayıdan önce geliyorsa (ya da yazılmışsa) o permütasyona bir **inversiyon** vardır denir. Eğer bir permütasyonda inversiyonların sayısı çift ise permütasyon çiftdir, eğer inversiyonların sayısı tek ise permütasyon tektir. Eğer $n \geq 2$ $S_n$ de $n!/2$ tane çift, $n!/2$ tane de tek permütasyon vardır.

**Örnek:** $S_1 = \{1\}$, $1! = 1$ Bu permütasyon çiftdir çünü inversiyon sıfırdır.

**Örnek:** $S_2$ nin $2! = 1.2$, $\{1,2\}$, $\{2,1\}$ tek permütasyon
(inversiyon)

**Örnek:** $S_4 = \{1,2,3,4\}$ $\{4,3,2,1\}$

$$\left.\begin{matrix} 4,1 & 3,2 \\ 4,2 & 3,1 \\ 4,3 & 2,1 \end{matrix}\right\} \text{6 adet inversiyon}$$

**Örnek:** $S_3$ teki tüm permütasyonlar ve her bir permütasyondaki inversiyonlar yazınız.

| $\{1,2,3\}$ | $\{1,3,2\}$ | $\{2,1,3\}$ | $\{2,3,1\}$ | $\{3,1,2\}$ | $\{3,2,1\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 inversiyon | 1 inversiyon | 1 inversiyon | 2 inversiyon | 2 inversiyon | 3 inversiyon |
| çift | tek | tek | çift | çift | tek |

**Tanım:** $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ matris olsun $\det(A)$ (veya $|A|$) şeklinde gösterilen determinant fonksiyonu, $\det(A) = \sum (\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ şeklinde tanımlanır.

**Örnek:** $A = [a_{11}]$, $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$

**Örnek:** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2.4 - (-1).3 = 11$$

**Örnek:** Sarrus Kuralı

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} - & - & - & + & + & + \end{matrix}$$

$$\Rightarrow a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - (a_{13} \cdot a_{22} a_{31} + a_{23} a_{32} a_{11} + a_{33} a_{12} a_{21})$$

Subject :

Date :...../...../.....

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

$$\underbrace{(2+6+18)}_{26} - \underbrace{(9+3+8)}_{20} = 6$$

# Determinantların Özellikleri

1) $A = [a_{ij}]$ nxn matris olsun $\det(A) = \det(A')$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad (2+18+6) - (9+3+8) = 6$$

$$(2+6+18) - (9+3+8) = 6$$

2) Eğer B matrisi A matrisinin 2 satırının (2 sütununun) yer değiştirilmesiyle elde ediliyorsa $\det(B) = -\det(A)$

Örnek:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$4 - (-3) = 7 \qquad -3 - 2 = -7$$

3) Eğer A matrisinin 2 satırı (2 sütunu) eşit ise $\det(A) = 0$ dır

Örnek:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \end{matrix} \qquad (0 - 6 + 14) + (0 + 14 - 6) = 0$$

4) Eğer A nın bir satırı veya sütunu tamamen sıfır ise $\det(A) = 0$ dır

Örnek:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{matrix} \qquad (0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 0$$

Subject : Date :...../...../.....

5) A nın bir satırını (bir sütununu) $c \in \mathbb{R}$ ile çarpıp B matrisi elde edildiğinde o zaman $\det(B) = c \cdot \det(A)$ dır.

Örnek: $A = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} \Rightarrow 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$24 - 6 = 18 \qquad 6(4-1) = 18$

Örnek: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ $6[(5+4+2) - (5+4+2)] = 0$

$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{matrix}$

6) Eğer $B = [b_{ij}]$ matrisi, $A = [a_{ij}]$ matrisinin bir satırına (bir sütununa) bir başka satırın (sütunun) $c \in \mathbb{R}$ katının eklenmesi ile elde edilmiş ise o zaman $\det(B) = \det(A)$

Örnek: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

7) Eğer $A = [a_{ij}]$ matrisi üst veya alt üçgensel ise köşegenleri $(a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn})$ elemanlarının çarpımına eşittir

Örnek: $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_3 \to \frac{1}{2} S_3} 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{S_2 \to (-3)S_1 + S_2} -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_3 \to (-4)S_1 + S_3} -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -10 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_2 \to \frac{1}{4} S_2} -8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -10 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{S_3 - \frac{1}{5} S_2} -40 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{S_3 \to -\frac{S_2}{2} + S_3} -40 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -3/2 \end{matrix}$

$\Rightarrow \det(A) = -40 [(3+0+0) - (0+0+0)] = -120$

$-40 \cdot 1 \cdot (-2) \left(-\frac{3}{2}\right) = -120$

Subject : Date :...../...../.....

8) $E_3, E_2, E_1$ sırasıyla I, II ve III tipte elementer matrisler olsun

$E_1$: birim matristir iki satırın yer değiştirmesi,

$E_2$ birim matrisin bir satırının $c \neq 0$ ile çarpılması,

$E_3$ birim matrisin bir satırının bir $c \in \mathbb{R}$ katının başka satıra eklenmesiyle elde edilir)

$\det(E_1) = -\det(I_n) = -1$

$\det(E_2) = c \det(I_n) = c$

$\det(E_3) = \det(I_n) = 1$

**Lemma:** $E$ bir elementer matris ise $\det(EA) = \det(E).\det(A)$, $\det(AE) = \det(A).\det(E)$.

9) $A$, $n \times n$ matris olsun $A$ singüler değildir $\iff \det(A) \neq 0$

$A$, $n \times n$ matris olsun rank $A = n \iff \det(A) \neq 0$

10) $A$ ve $B$ $n \times n$ matrisler ise $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A.B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$4-6=-2$ $\qquad$ $4-(-1)=5$ $\qquad$ $\det(AB) = 20-30 = -10$

$\det(A) = -2$ $\qquad$ $\det(B) = 5$

11) $A$ singüler değilse $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

$\det(A.A^{-1}) = \det(I_n) \Rightarrow \det(A).\det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

12) $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

Eğer $A, B, C$ nin sadece bir satırı hariç (mesela k. satır hariç) diğer satırlar eşitse ve

$C$ nin k. satırı = ($A$ nın k. satırı) + ($B$ nin k. satırı) ise $\det(C) = \det(A) + \det(B)$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$|A| = 8$ $\qquad$ $|B| = -9$ $\qquad$ $|C| = -1$ $\qquad$ $|C| = |A| + |B|$

Subject :

Date :...../...../.....

01.04.26

# Kofaktör Açılımı

$A = [a_{ij}]$ $n \times n$ matris olsun. $M_{ij}$ de $A$ nın $i$. satırı ile $j$. sütunun çıkarılmasıyla elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki alt matris olsun $\det(M_{ij})$ $a_{ij}$ nin minörü denir

$A = [a_{ij}]$ $n \times n$ matris olsun $A_{ij}$ kofaktörü $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ olarak tanımlanır

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

minörler

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow 8 - 42 = -34 \qquad |M_{23}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 3 - (-7) = 10$$

kofaktörler

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det(M_{12}) \Rightarrow A_{12} = (-1) \cdot (-34) = 34$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det(M_{23}) \Rightarrow A_{23} = (-1) \cdot 10 = -10$$

Teorem: $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ matris olsun O zaman;

$\det(A) = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}$ $i$. satıra göre kofaktör açılımı

$\det(A) = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj}$ $j$. sütuna göre kofaktör açılımı

Örnek:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Determinantını hesaplayın

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow 20 \qquad |A_{34}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow -4$$

$$(-1)^4 \cdot 3 \cdot 20 + (-1)^7 \cdot (-3) \cdot (-4) = 48$$

Subject : Date :...../...../.....

**Ödev** Determinantını bulunuz

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \Bigg\} \quad 1 \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-1)^{1+1} \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}_{3-(-6)} + 2 \times (-1)^{2+1} \times \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}_{-9-(-8)} + \quad > 20$$

$$3 \left[ \underbrace{2 \times (-1)^{1+2} \times \underbrace{\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}_{8-2}}_{-12} + \underbrace{2 \times (-1)^{2+2} \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}_{-2-(-6)}}_{8} \right]$$

$-12$ $\qquad$ $\det(M) = 8$

**Teorem:** $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ matris ise

$i \neq k$ için, $a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \cdots + a_{in} A_{kn} = 0$

$j \neq k$ için, $a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \cdots + a_{nj} A_{nk} = 0$

**Örnek:**

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} \qquad A_{21} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 19 \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

$i = 1$ için, $a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23} = 1 \cdot 19 + 2 \cdot (-14) + 3 \cdot 3 = 0$

$i = 3$ için, $a_{31} A_{21} + a_{32} A_{22} + a_{33} A_{23} = 4 \cdot 19 + 5 \cdot 14 + (-2) \cdot 3 = 0$

$$a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \cdots + a_{in} A_{kn} = \begin{cases} \det(A), & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

$$a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \cdots + a_{nj} A_{nk} = \begin{cases} \det(A), & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

**Tanım:** $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ matris olsun $(i, j)$ elemanı $a_{ji}$ nin kofaktörü $A_{ji}$ olan matrise **A nın ek matrisi (adjoint matrisi)** denir. **ek(A)** veya **adj(A)** şeklinde gösterilir.

$$ek(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Subject : Date :...../...../.....

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$A_{11} = -18$, $A_{12} = 17$, $A_{13} = -6$

$A_{21} = -6$, $A_{22} = -10$, $A_{23} = -2$

$A_{31} = -10$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = 28$

$$ek(A) = \begin{bmatrix} -18 & 17 & -6 \\ -6 & -10 & -2 \\ -10 & -1 & 28 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

Teorem: $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ matris ise $A.ek(A) = ek(A).A = |A|.I_n$ dir.

İspat:

$$A.ek(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A.ek(A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & |A| \end{bmatrix} = \det(A).I_n$$

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -94 & 0 & 0 \\ 0 & -94 & 0 \\ 0 & 0 & -94 \end{bmatrix} = -94.I_3$$

$\Rightarrow |A| = -94$

$A$ $n \times n$ matris ve $|A| \neq 0$ ise,

$$A^{-1} = \frac{ek(A)}{|A|} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{12}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & & & \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.ek(A) = \begin{bmatrix} \frac{18}{94} & \frac{6}{94} & \frac{10}{94} \\ -\frac{17}{94} & \frac{10}{94} & \frac{1}{94} \\ \frac{6}{94} & \frac{2}{94} & -\frac{28}{94} \end{bmatrix}$$

Subject :

Date :...../...../.....

# Determinantın diğer uygulamaları

## Cramer Yöntemi

$n \times n$ tipinde $Ax = B$ lineer denklem sistemi verilsin

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

$\det(A) \neq 0$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ \ldots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

Örnek:

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}\right\} \text{Denklem sistemini çözünüz}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

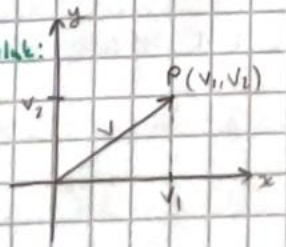
$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 4)$$

## $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ te Uzunluk ve Yön

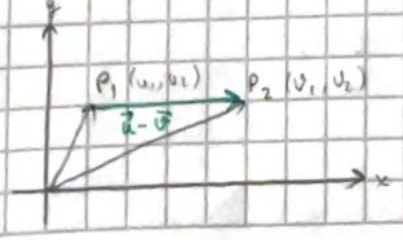
Uzunluk:




$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

iki vektör arasındaki uzaklık: $P_1(u_1, u_2)$, $P_2(v_1, v_2)$

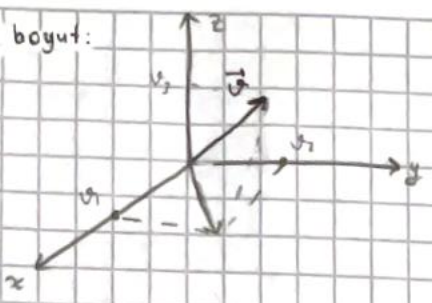
$$\|u - v\| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2}$$



Subject :

Date :...../...../.....

3 boyut:

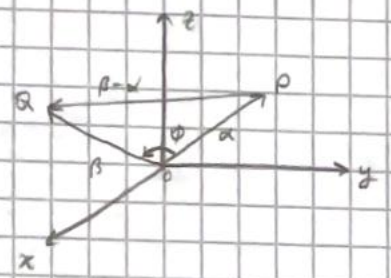



$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Not: Eğer $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \|v-u\| = \sqrt{(v_1-u_1)^2 + (v_2-u_2)^2 + (v_3-u_3)^2}$

## Yön (doğrultman) kosinüsleri

$\mathbb{R}^3$'te bir vektörün yönü bu vektörün $x_1, x_2, x_3$ eksenleri ile yaptığı açıların kosinüsleri ile belirlenir. Bunlara yön (doğrultman) kosinüsleri denir.




$$|PQ|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\,|\alpha|\,|\beta| \cos\phi$$

$$\cos\phi = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 - |\beta - \alpha|^2}{2\,|\alpha|\,|\beta|}$$

$$\cos\phi = \frac{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) + (\beta_1 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \alpha_2)^2 + (\beta_3 - \alpha_3)^2}{2\,|\alpha|\,|\beta|}$$

$$\boxed{\cos\phi = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{|\alpha|\,|\beta|}}$$

Örnek: $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörleri arasındaki açı nedir?

$$\cos\phi = \frac{1.0 + 1.1 + 0.1}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}$$

Tanım: $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$'te $\alpha$ ve $\beta$ nın standart iç çarpımı $\alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$ olarak tanımlanır. $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\alpha \cdot \beta$ şeklinde gösterilir.

$$|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}, \quad \cos\phi = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha|\,|\beta|} \quad (0 < \phi < \pi)$$

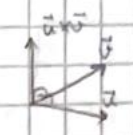
Subject :  Date :...../...../.....

# Vektörel Çarpım

Eğer $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ 3 boyutlu uzayda vektörler ise;

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

vektörel çarpımdan elde edilen vektör, hem u hem de v vektörüne diktir




Örnek: $\vec{u} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ , $\vec{v} = 3\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ ise $\vec{u} \times \vec{v}$ nedir?

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} = -\hat{i} - 12\hat{j} - 5\hat{k}$$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ $\mathbb{R}^3$'te vektörler ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Vektörel çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar

a) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

b) $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} + \vec{w})$ (dağılma özelliği, birleşme ve değişme özellikleri yoktur)

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

d) $c(\vec{u} \times \vec{w}) = c\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times (c\vec{v})$

e) $\vec{u} \times \vec{u} = 0$ (dik olmamaz, aralarındaki açı 0)

f) $0 \times \vec{u} = \vec{u} \times 0 = 0$

g) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})v - (u \cdot v)w$ (hacim belirtir)

h) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{u})v - (\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u}$

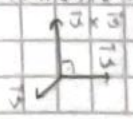
Örnek: $\vec{u} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{v} = 3\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{w} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{u} \times \vec{v} = -\hat{i} + 12\hat{j} - 5\hat{k}$

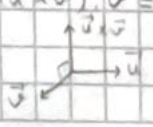
$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 8$  $\vec{u}(\vec{v} \times \vec{w}) = 8$

$\vec{v} \times \vec{w} = 3\hat{i} - 12\hat{j} + 7\hat{k}$

a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$




b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$



Subject : Date :...../...../.....

08.04.26

$\|u \times v\|^2 = (u \times v) \cdot (u \times v)$ kullanılan kural $(u \times v) \cdot \vec{w} = \vec{v}(\vec{u} \times \vec{w})$

$= \vec{u}\left[\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{v})\right]$

$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\, v - (\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w}$

$= \vec{u}\,\vec{u}\,(\vec{v}\,\vec{v}) - \vec{v} \cdot \vec{u}\;\vec{v}\,\vec{v}$

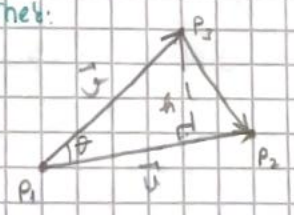
$= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - (\vec{u}\,\vec{v})^2$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cos\theta - \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \cdot \cos^2\theta = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \cdot (1 - \cos\theta)$

$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\| \cdot \sin^2\theta \Rightarrow \|u \times v\| = (\|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin\theta$

**Not:** Eğer $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki açı $\theta = 0$ ise $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ ve bu vektörler paralel dir.

Örnek:




Köşeleri $P_1, P_2, P_3$ noktaları olan üçgen alanı olurdu

$A(\triangle P_1, P_2, P_3) = \frac{1}{2} \underbrace{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\theta}_{h}$

$= \frac{1}{2} \cdot \|\vec{u} \times \vec{v}\|$

Örnek: Köşeleri $P_1(2,2,4)$, $P_2(-1,0,5)$ ve $P_3(3,4,3)$ olan üçgenin alanını hesaplayınız.

$P_2 - P_1$

$\vec{u} = (-1-2)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (5-4)\hat{k} = -3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{v} = (3-2)\hat{i} + (4-2)\hat{j} + (3-4)\hat{k} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$P_3 - P_1$

$\|u \times v\| = \frac{1}{2} \left\| (-3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \times (\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \right\|$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \right\|$$

$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \frac{1}{2} \left\| 2\hat{i} - 6\hat{k} + \hat{j} - (-2\hat{k} + 2\hat{i} + 3\hat{j}) \right\|$

$= \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Subject :

Date :...../...../.....

# İç çarpım uzayı

**Tanım:** $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ olsun. $\mathbb{R}^3$ de $\alpha$ ile $\beta$ nın standart iç çarpımı

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ şeklinde tanımlanır ve $\alpha \cdot \beta$ veya $\langle \alpha, \beta \rangle$ ile gösterilir

$|\alpha| = \langle \alpha, \alpha \rangle$ , $\cos \theta = \dfrac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha| \cdot |\beta|}$ $\quad (\langle \alpha, \beta \rangle = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot \cos \theta)$

**Not:** $\alpha$ ve $\beta$ vektörleri birbirine dik ise ortogonal vektörlerdir. $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ $\quad (\cos 90 = 0)$

**Teorem:** $\mathbb{R}^3$ deki standart iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlamalıdır

a) $\alpha \neq \theta \Rightarrow (\langle \alpha, \beta \rangle) > 0$

b) $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$

c) $\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$

d) $\langle c\alpha, \beta \rangle = c \langle \alpha, \beta \rangle$

Bu özellikleri sağlayan uzaylar iç çarpım uzaydır. (iç çarpım = skalar çarpım = nokta çarpım)

**Tanım:** V bir vektör uzayı olsun. $\forall \alpha, \beta \in V$ çiftini bir $\langle \alpha, \beta \rangle$ reel sayısına eşleyen aşağıdaki şartları sağlayan kurala V nin iç çarpımı denir

a) $[\langle \alpha, \alpha \rangle] > 0$ $\quad (\forall \alpha \neq \theta)$

b) $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$ $\quad (\forall \alpha, \beta \in V$ için$)$

c) $\langle \alpha + \beta, \gamma \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle + \langle \beta, \gamma \rangle$

d) $\langle c\alpha, \beta \rangle = c \langle \alpha, \beta \rangle$ $\quad (\forall \alpha, \beta \in V$ ve $\forall c \in \mathbb{R})$

$\langle \alpha, c\beta \rangle = \langle c\beta, \alpha \rangle = c \langle \alpha, \beta \rangle$

**Örnek:** $\mathbb{R}^n$ de standart iç çarpım

$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ $\quad \langle \alpha, \beta \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$

$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ve $\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\langle \alpha, \beta \rangle = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1$

$= -3$

Subject :

Date :...../...../.....

Not: $\mathbb{R}^n$'de $A=[a_{ij}]$ $n\times n$ matris ise ve $x, y \in \mathbb{R}^n$ ise,

$$\langle A.x, y\rangle = \langle x, A'y\rangle$$

İspat: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle \alpha, \beta\rangle = \alpha'\beta$ (matris çarpım özellikleri)

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax)'y = x'.A'.y = x.A'y = y.x.A'$$

$$= x'A'y = x.A'y = \langle x, A'y\rangle$$

Örnek: $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\langle \alpha, \beta\rangle = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 3a_2b_2$ olarak tanımlanan $\langle \alpha, \beta\rangle$ bir iç çarpım uzayı mıdır?

$$\langle \alpha, \alpha\rangle = a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 = (a_1 - a_2)^2 + 2a_2^2 > 0$$

Örnek: $V$, $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı, sürekli ve gerçel fonksiyonların uzayı olsun $f, g \in V$ için

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$$

a) $f \neq 0 \Rightarrow \langle f, f\rangle = \int_0^1 f^2(t)\,dt > 0$

b) $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,f(t)\,dt = \langle g, f\rangle$

c) $\langle f+g, h\rangle = \int_0^1 [f(t)+g(t)].h(t)\,dt = \int_0^1 f(t).h(t)\,dt + \int_0^1 g(t).h(t)\,dt = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$

d) $\langle cf, g\rangle = \int_0^1 c\,f(t)\,g(t)\,dt = c\int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt = c\langle f, g\rangle$

$f(t) = t+1$, $g(t) = 2t+3$ $\quad \langle f, g\rangle = \int_0^1 (t+1)(2t+3)\,dt = \frac{37}{6}$

Örnek: $V = P$, $p(t), q(t) \in P$ polinomlar için $\langle p(t), q(t)\rangle = \int_0^1 p(t)\,q(t)\,dt$ bir iç çarpımdır

Tanım: Üzerinde bir iç çarpım tanımlı olan uzaya bir iç çarpım uzayı denir. Eğer bu uzay tam ise yani bir iç çarpım uzayı olan öklidyen uzay (öklid uzayı) denir. Bir iç çarpım uzayında $\alpha$ vektörünün uzunluğu $\|\alpha\| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha\rangle}$

Örnek: $\|\theta\| = 0$ olduğunu gösteriniz

$\theta + \theta = \theta \qquad \langle \theta, \theta\rangle = \langle \theta+\theta, \theta\rangle = \langle \theta, \theta\rangle + \langle \theta, \theta\rangle$

$$\|\theta\| = \|\theta\| + \|\theta\| \Rightarrow \|\theta\| = 0$$

Subject : Date :...../...../.....

**Örnek:** $V$ bir iç çarpım uzayı, $\forall \alpha \in V$ için $\langle \alpha, \theta \rangle = 0$ olduğunu gösterelim

$\langle \alpha, \theta \rangle = \langle \alpha, \theta + \theta \rangle = \langle \alpha, \theta \rangle + \langle \alpha, \theta \rangle \Rightarrow \langle \alpha, \theta \rangle = 0$

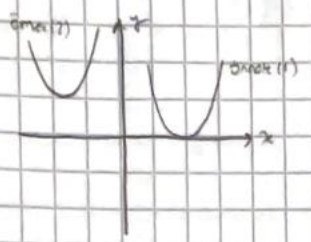
**Teorem:** (Cauchy - Schwarz Eşitsizliği) $\alpha$ ve $\beta$ bir $V$ iç çarpım uzayının elemanları ise,

$$\boxed{\langle \alpha, \beta \rangle^2 \leq \|\alpha\|^2 . \|\beta\|^2}$$

**İspat:** Eğer $\alpha = \theta$ ise $\|\alpha\| = 0$, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$

Eğer $\alpha \neq \theta$ ise $r \in \mathbb{R}$ $r\alpha + \beta$ ele alınırsa $0 \leq (\langle r\alpha + \beta, r\alpha + \beta \rangle) = r^2 \underbrace{\langle \alpha, \alpha \rangle}_{a} + 2r \underbrace{\langle \alpha, \beta \rangle}_{b} + \underbrace{\langle \beta, \beta \rangle}_{c}$

$$0 \leq ar^2 + 2br + c$$




diskriminant: $4b^2 - 4ac \leq 0$

$b^2 - ac \leq 0 \Rightarrow b^2 \leq ac$

$\Rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle^2 \leq \langle \alpha, \alpha \rangle . \langle \beta, \beta \rangle$

$\Rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle^2 \leq \|\alpha\|^2 . \|\beta\|^2$

**Örnek:** $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\langle \alpha, \beta \rangle^2 \leq \|\alpha\|^2 . \|\beta\|^2$ olduğunu inceleyelim

$(-3 + 4 - 6)^2 \leq (1 + 4 + 9) . (4 + 4 + 9) \Rightarrow 25 \leq 14 . 17$

$25 \leq 238$

**Tanım:** $\alpha$ ve $\beta$ bir iç çarpım uzayında iki vektör olsun Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$$\frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{\|\alpha\|^2 . \|\beta\|^2} \leq 1 \quad \text{veya} \quad -1 \leq \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| . \|\beta\|} \leq 1 \qquad \cos\phi = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| . \|\beta\|} \qquad 0 \leq \phi \leq \pi$$

$\alpha$ ile $\beta$ arasındaki açı

**Sonuç:** (Üçgen eşitsizliği) Eğer $\alpha$ ile $\beta$ bir iç çarpım uzayındaki 2 vektör ise

$\langle \alpha, \beta \rangle \leq \|\alpha\| . \|\beta\|$

**İspat:** $\|\alpha + \beta\|^2 = \langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle = \underbrace{\langle \alpha, \alpha \rangle} + 2 \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle$

$\|\alpha\|^2 + 2 \langle \alpha, \beta \rangle + \|\beta\|^2$

$\langle \alpha, \beta \rangle \leq |\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| . \|\beta\|$

$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \underbrace{2 \langle \alpha, \beta \rangle}_{\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|} + \|\beta\|^2 \leq \|\alpha\|^2 + 2 \|\alpha\| \|\beta\| + \|\beta\|^2 = (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2$

Subject : Date :...../...../.....

**Not:**

$$\langle \alpha, \beta \rangle^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

**Örnek:** $\langle f, g \rangle^2 = \left(\int_0^1 f(t) g(t)\, dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(t)\, dt\right) \cdot \left(\int_0^1 g^2(t)\, dt\right)$

**Örnek:** $V = P_2$ (derecesi 2'yi geçmeyen polinomlar) $p(t) = t + 2$ $\left(V = P_2 ;\ p(t), q(t) \in P_2 \Rightarrow \langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 p(t) q(t)\, dt\right)$

$$\|p(t)\| = \sqrt{\langle p(t), p(t) \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (t+2)^2\, dt} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$$

a) $q(t) = 2t + 3$, $p(t)$ ile $q(t)$ nin arasındaki açı nedir?

$$\|q(t)\| = \sqrt{\int_0^1 (2t+3)^2} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}} \qquad \langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 (t+2)(2t+3)\, dt = \frac{29}{6}$$

$$\cos \phi = \frac{\langle p(t), q(t) \rangle}{\|p(t)\| \cdot \|q(t)\|} = \frac{\sqrt{29}}{2\sqrt{247}}$$

**Tanım:** $V$ bir iç çarpım uzayı olsun $\alpha, \beta \in V$ vektörlerinin arasındaki uzaklık,

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$$

**Tanım:** $V$ bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ ise $\alpha$ ile $\beta$ vektörleri ortogonaldir denir.

**Örnek:** $\mathbb{R}^4$'te standart iç çarpıma göre,

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ortogonaldir} \qquad \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

**Örnek:** $V = P_2$ olsun $t$ ve $t - \frac{2}{3}$ vektörleri ortogonaldir

$$\left\langle t, t - \frac{2}{3} \right\rangle = \int_0^1 t\left(t - \frac{2}{3}\right) dt = \int_0^1 \left(t^2 - \frac{2t}{3}\right) dt = 0$$

**Not:** Bir $V$ iç çarpım uzayında $\theta_V$ vektörü her vektöre ortogonaldir. Ayrıca iki vektör arasındaki açı $\frac{\pi}{2}$ ise bu vektörler de ortogonaldir.

Subject : Date :...../...../.....

22.04.26

# Lineer Bağımsızlık

Elemanı sayısı sonlu olan tek vektör uzayı $\{\theta\}$ uzayıdır. Çünkü $V$ bir vektör uzayı $\theta \neq \alpha \in V$ ise her $c \in \mathbb{R}$ için $c\alpha \in V$ olacağından $V$ sonsuz elemanlı olur.

**Tanım:** $V$ bir vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq V$ olsun. Eğer bir $\alpha \in V$ vektörü $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_k\alpha_k$$

şeklinde yazılabiliyorsa $\alpha$ ya $S$'deki vektörlerin bir lineer kombinasyonu (doğrusal birleşimi) denir.

**Örnek:** $\mathbb{R}^3$'de $\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektörü $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonudur.

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \Rightarrow a_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Buradan $\left\{\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = 2 \\ 2a_1 \quad + a_3 = 1 \\ a_1 + 2a_2 \quad = 5 \end{array}\right\}$ denklemi çözülürse $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -1$ bulunur.

Yani $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$ olur.

**Örnek:** $\mathbb{R}^3$'de $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ olsun. $\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektörünün $\text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ kümesinde olup olmadığını inceleyiniz.

**Çözüm:** $\alpha = a_1\alpha + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4$ olacak şekilde $a_1, a_2, a_3, a_4$ sayıları bulunursa $\alpha \in \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ olur.

$$a_1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 = 0 \\ a_1 \quad + a_2 \quad = -2 \\ 2a_1 + a_2 \quad - a_4 = 4 \end{array}\right\}$$

Ek matrisi satır eşelon forma getirirsek:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

, buradan $a_1 = a_4$, $a_2 = 4 - a_4$, $a_3 = -2 - a_4$, $a_4 =$ bir reel sayı.

Yani $\alpha \in \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ olur. (Sonsuz mümkün $a_1, a_2, a_3, a_4$ olanlar)

Subject : Date :...../...../.....

**Tanım:** $V$ bir vektör uzayı $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq V$ olsun. Eğer $V$ deki her vektör $S$ deki vektörlerin bir lineer kombinasyonu ise $S$, $V$ yi doğurur (gerer, üretir) veya $V$, $S$ tarafından doğrulur (gerilir, üretilir) denir.

**Örnek:** $V = \mathbb{R}^3$ olsun. $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi $V$'yi gerer mi?

**Çözüm:** $\alpha = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in V$ olsun. ($a, b, c \in$ herhangi 3 reel sayı) $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$ denkleminin çözümüne bakalım (yani her $a, b, c$ için $a_1, a_2, a_3$ bulunabileceğini göstermeye çalışalım)

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= a \\ 2a_1 \qquad + a_3 &= b \\ a_1 + 2a_2 \qquad &= c \end{aligned}\right\}$$ Çözülürse $a_1 = \frac{-2a+2b+c}{3}$; $a_2 = \frac{a-b+c}{3}$; $a_3 = \frac{4a-b+2c}{3}$ bulunur.

Görüldüğü gibi, her $a, b, c$ için $a_1, a_2, a_3$ vardır. O halde $\text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = V$ dir.

**Örnek:** $V = P_2$ olsun. $\alpha_1 = t^2 + 2t + 1$ ve $\alpha_2 = t^2 + 2$ de $\text{span}\{\alpha_1, \alpha_2\} = V$ midir?

**Çözüm:** $a, b, c$ reel sayılar olmak üzere $\alpha = at^2 + bt + c \in V$ alalım. $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$ olacak şekilde $a_1, a_2$ sabitlerini bulmalıyız.

$$at^2 + bt + c = a_1(t^2 + 2t + 1) + a_2(t^2 + 2) = (a_1 + a_2)t^2 + (2a_1)t + (a_1 + 2a_2)$$

eşitliğinden $\left\{\begin{aligned} a_1 + a_2 &= a \\ 2a_1 \qquad &= b \\ a_1 + 2a_2 &= c \end{aligned}\right\}$ sistemi elde edilir.

Ek matris yazıp indirgenmiş forma getirirsek $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2a-c \\ 0 & 1 & c-a \\ 0 & 0 & b-4a+2c \end{array}\right]$ bulunur.

Eğer $b - 4a + 2c \neq 0$ ise çözüm yoktur (bu eşitliği sağlayan $a, b, c$ vardır) yani $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $V$ yi doğurmaz.

Subject :  Date :...../...../.....

**Tanım:** $V$ bir vektör uzayı $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq V$ olsun. Eğer

$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_k\alpha_k = \theta_V$ olacak şekilde, hepsi sıfır olmayan $a_1, a_2, \dots, a_k$ sabitleri varsa $S$ kümesine **lineer bağımlıdır** denir. Aksi halde (yani $a_i$'lerin hepsinin $0$ olması zorunlu ise) $S$'ye **lineer bağımsızdır** denir.

**Örnek:** $V = \mathbb{R}_4$ olsun. $\alpha_1 = [1\ 0\ 1\ 2]$, $\alpha_2 = [0\ 1\ 1\ 2]$ ve $\alpha_3 = [1\ 1\ 1\ 3]$ ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ olsun. $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = \theta$ diyelim. $a_1, a_2, a_3$'ü bulalım.

$$\left.\begin{aligned} a_1 \quad\quad + a_3 &= 0 \\ a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ 2a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Çözülürse $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ olur. Yani $S$ lineer bağımsızdır.

**Örnek:** $\mathbb{R}^3$ de $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ve $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ kümesi lineer bağımlı mıdır?

**Çözüm:** $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 = \theta$ eşitliğinden

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 &= 0 \\ 2a_1 - 2a_2 + 2a_3 \quad\quad &= 0 \\ -a_1 + a_2 - a_3 \quad\quad &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Denklem sistemi elde edilir. $m < n$ olduğundan trivial olmayan çözüm vardır. Örneğin $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 0$ bir çözümdür. Yani $S$ lineer bağımlıdır.

**Örnek:** $P_2$ de $\alpha_1 = t^2 + t + 2$, $\alpha_2 = 2t^2 + t$, $\alpha_3 = 3t^2 + 2t + 2$ verilsin. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ lineer bağımlıdır. Çünkü $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = \theta$ dır.

**Örnek:** $\mathbb{R}_3$ de $\alpha_1 = [1\ 0\ 0]$, $\alpha_2 = [0\ 1\ 0]$, $\alpha_3 = [0\ 0\ 1]$ vektörleri lineer bağımsızdır.

$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = (0, 0, 0)$

$a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$

Tek çözüm trivial (sıfır) çözümdür.

Subject : Date :...../...../.....

**Teorem:** $S_1$ ve $S_2$ bir vektör uzayının sonlu alt kümeleri ve $S_1 \subseteq S_2$ olsun.

(a) $S_1$ lineer bağımlı ise $S_2$ de lineer bağımlıdır.

(b) $S_2$ lineer bağımsız ise $S_1$ de lineer bağımsızdır.

**İspat (a)**

$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ ve $S_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m\}$ olsun. $S_1$ lineer bağımlı olduğundan hepsi birden sıfır olmayan $a_1, \dots, a_k$ sayıları için $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_k\alpha_k = \theta$ dır.

O zaman $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 \dots + a_k\alpha_k + 0\alpha_{k+1} + 0\alpha_{k+2} + \dots + 0\alpha_m = \theta$ dır.

Yukarıdaki toplamın sol tarafındaki katsayıların hepsi birden sıfır olmayan $S_2$ lineer bağımlıdır.

**İspat (b)**

$S_2$ lineer bağımsız olsun. Bir an için $S_1$'in lineer bağımlı olduğu kabul edelim. O zaman (a)'dan dolayı $S_2$ lineer bağımlı olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $S_1$ lineer bağımsızdır.

**Not:** Bir vektör uzayında $S = \{\theta\}$ kümesi lineer bağımlıdır, çünkü $1\theta = \theta$ ve $1 \neq 0$ dır.

Buradan; $\theta$'yı içeren bir $S$ kümesinin lineer bağımlı olduğu söylenebilir.

**Not:** $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ de lineer bağımlılık ne anlam taşır?

$\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\mathbb{R}^2$ de lineer bağımlı olsun. Yani $a_1, a_2$ hepsi birden sıfır olmayan sayılar olmak üzere

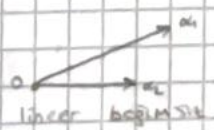
$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = 0$ dır.

$a_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\alpha_2$ veya $a_2 \neq 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\alpha_1$ dir. Yani bir. ögenin bir katıdır.

Tersine, vektörlerden biri ögenin bir katı olsun. Mesela $\alpha_1 = a\alpha_2 \Rightarrow 1\alpha_1 - a\alpha_2 = 0$ olup $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

$\{\alpha_1, \alpha_2\}$ lineer bağımlı $\Longleftrightarrow$ bir ögenin katı $\Longleftrightarrow$ merkezden geçen aynı doğru üzerindeler

lineer bağımlı




lineer bağımsız

$\mathbb{R}^2$ de lineer bağımlı ve lineer bağımsız vektörler

Benzer bir sonuç $\mathbb{R}^3$ için şöyledir:

$\mathbb{R}^3$'de üç vektör lineer bağımlıdır $\Longleftrightarrow$ Bu üç vektör merkezden geçen aynı düzlem üzerindedir.

Subject :

Date : ...../...../.....

**Teorem:** $V$ bir vektör uzayı, $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subseteq V$ sıfır olmayan vektörlerin bir kümesi olsun. $S$'nin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart bir $\alpha_j$ vektörünün kendinden önce gelen vektörlerin bir lineer kombinasyonu olmasıdır.

**İspat** ($\Leftarrow$) $\alpha_j = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_{j-1}\alpha_{j-1}$ olsun o zaman

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_{j-1}\alpha_{j-1} + (-1)\alpha_j + 0\alpha_{j+1} + \dots + 0\alpha_n = \theta \quad \text{olup}$$

(katsayıların hepsi birden 0 olmadığından) $S$'nin lineer bağımlı olduğu görülür.

($\Rightarrow$) $S$ lineer bağımlı olsun o zaman hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sayıları için $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = \theta$ dır

$j$ sayısı $a_j \neq 0$ olacak şekilde en büyük $j$ olsun. Yani $j = \max\{j : a_j \neq 0\}$ olsun.

Eğer $j = 1$ ise $a_1\alpha_1 = \theta \Rightarrow \alpha_1 = \theta$ olur ki bu da $S$ deki vektörlerin sıfırdan farklı olmasına ile çelişir. O halde $j > 1$ dir. Bu durumda

$$a_j = -\left(\frac{a_1}{a_j}\right)\alpha_1 - \left(\frac{a_2}{a_j}\right)\alpha_2 - \dots - \left(\frac{a_{j-1}}{a_j}\right)\alpha_{j-1}$$

Yani $S$ deki vektörlerin biri kendinden önceki lerin bir lineer kombinasyonudur.

**Örnek:** $V = \mathbb{R}_3$ ve $\alpha_1 = [1\ 2\ -1]$, $\alpha_2 = [1\ 2\ -1]$, $\alpha_3 = [-3\ 2\ -1]$, $\alpha_4 = [2\ 0\ 0]$ olsun.

$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 0\alpha_4 = \theta$ olup $\alpha_3 = -\alpha_1 - 2\alpha_2$ olur. Ayrıca $\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3 - \alpha_4 = \theta$ olup $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3$

Yani birbirinin vektörlerin diğerlerinin lineer kombinasyonu olmaları gerekmez.

→ $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ bir $V$ vektör uzayının alt kümesi olsun.

$S$ lineer bağımlı $\Leftrightarrow$ $S$ deki bir vektör diğerlerinin lineer kombinasyonudur

→ $V$ bir vektör uzayı olsun ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ $V$'yi doğursun. $\alpha_j$ kendinden önceki vektörlerin lineer kombinasyonu olsun o zaman

$$S_1 = S \setminus \{\alpha_j\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n\}$$

kümesi de $V$'yi doğurur

Subject :

Date :...../...../.....

**İspat:** $\alpha \in V$ olsun. $\mathrm{Span}(S) = V$ olduğundan $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerleri vardır öyle ki

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_{j-1}\alpha_{j-1} + a_j\alpha_j + a_{j+1}\alpha_{j+1} + \dots + a_n\alpha_n$$

Eğer $\alpha_j = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_{j-1}\alpha_{j-1}$ ise o zaman

$$\alpha = a_1\alpha_1 + \dots + a_{j-1}\alpha_{j-1} + a_j(b\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_{j-1}\alpha_{j-1}) + a_{j+1}\alpha_{j+1} + \dots + a_n\alpha_n$$

$$= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 \dots + c_{j-1}\alpha_{j-1} + c_{j+1}\alpha_{j+1} + \dots + c_n\alpha_n \quad \text{olur}$$

(Burada $c_i$ ifadeleri hesaplanabilir) Son toplamda $\alpha_j$ olmadığından $\mathrm{Span}(S_1) = V$ olduğu görülür (Her $\alpha \in V$ için bu yapılabildiğinden)

**Örnek:** $\mathbb{R}^4$ de $\alpha_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix}$ ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ olsun

$W = \mathrm{Span}(S)$ olsun. $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$ olduğundan $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ olmak üzere $W = \mathrm{Span}(S_1)$ diyebiliriz.

Yani $W$ uzayını doğurmak için $\alpha_4$ elemanına ihtiyacı yoktur

## Baz ve Boyut

**Tanım:** $V$ bir vektör uzayı, $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq V$ olsun. Eğer $S$ lineer bağımsız ve ve $\mathrm{Span}(S) = V$ ise $S$ ye $V$nin bir **baz (taban)** denir

**Örnek:** $V = \mathbb{R}^3$ olsun. $S = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$ olsun. $S$, $\mathbb{R}^3$ün bir bazıdır. Bu baza

$\mathbb{R}^3$ün **doğal baz**ı denir. Benzer şekilde $\mathbb{R}_3$ün doğal bazı $S = \{[1\,0\,0], [0\,1\,0], [0\,0\,1]\}$ kümesidir. $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal bazının elemanları $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ ile gösterilir. Burada $\varepsilon_i$ elemanı $i$-inci satırı 1 diğer elemanları 0 olan vektördür

$$\varepsilon_i = \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \longleftarrow i.\ \text{satır}$$

$\mathbb{R}^3$ün doğal bazının elemanları, ayrıca $i = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $j = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $k = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ile gösterilir

$\mathbb{R}^3$deki herhangi bir $\alpha = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ vektörü $a_1 i + a_2 j + a_3 k$ şeklinde yazılır

Subject : Date :...../...../.....

**Örnek:** $S = \{t^2+1,\ t-1,\ 2t+2\}$ kümesinin $P_2$'nin bir bazı olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** $Span(S) = P_2$ ve $S$'nin lineer bağımsız olduğunu göstermeliyiz. $(at^2+bt+c) \in P_2$ alınsın

$at^2+bt+c = a_1(t^2) + a_2(t-1) + a_3(2t+2)$ olacak şekilde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ bulunduğu

$$\left.\begin{aligned} a_1 \qquad\qquad &= a \\ a_2 + 2a_3 &= b \\ a_1 - a_2 + 2a_3 &= c \end{aligned}\right\} \quad a_1 = a,\ a_2 = \frac{a+b-c}{2},\ a_3 = \frac{c+b-a}{4} \text{ bulunur}$$

Her $a, b, c$ için $a_1, a_2, a_3$ bulunabildiğinden $Span(S) = P_2$ dir

Şimdi de $S$'nin lineer bağımsız olduğunu gösterelim $a_1(t^2+1) + a_2(t-1) + a_3(2t+2) = 0$ dersek buradan $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ olması gerektiği görür. Sonuç: $S$, $P_2$ için bir bazdır

**Teorem:** Eğer $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ kümesi bir $V$ vektör uzayının bir bazı ise $V$'deki her vektör $S$'deki vektörlerin bir lineer kombinasyonu olarak tek türlü yazılabilir.

**Ispat:** $Span(S) = V$ olduğu için her $\alpha \in V$ vektörü $S$'deki vektörlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n \quad \text{ve}$$

$$\alpha = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n$$

iki farklı şekilde yazılmış olsun. $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i = b_i$ olduğunu göstermeliyiz. Şimdi

$$\theta = \alpha - \alpha = (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n) - (b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n)$$

$$= (a_1 - b_1)\alpha_1 + (a_2 - b_2)\alpha_2 + \dots + (a_n - b_n)\alpha_n$$

olup $S$ lineer bağımsız olduğundan $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i - b_i = 0$ olmalıdır, yani $a_i = b_i$ olmalıdır.

Subject :

Date :...../...../.....

**Teorem:** Eğer $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ kümesi sıfır olmayan vektörlerden bir kümesi ve $Span(S) = V$ ise $S$ kümesi $V$ için bir $T$ bazı içerir.

**İspat:** Eğer $S$ lineer bağımsız ise $S$, $V$ için bir bazdır, yani $T = S$ alınabilir. $S$ lineer bağımlı ise bir $\alpha_j$ vektörü kendinden önceklerin lineer kombinasyonudur. $S_1 = S \setminus \{\alpha_j\}$ yazılır ve $Span(S_1) = V$ dir. $S_1$ lineer bağımsız ise $S_1$ bazdır. $S_1$ lineer bağımlı ise benzer şekilde $S_2 = S_1 \setminus \{\alpha_j\}$ bulunur. Bu şekilde devam edilirse $T \subseteq S$ lineer bağımsız olacak şekilde bir $T$ bazı bulunur.

## V'yi geren bir S kümesinden T bazı elde etme

**Adım.1:** $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = \theta$ eşitliği oluşturur.

**Adım.2:** Buradan ek matris oluşturulur ve bu matris indirgenmiş satır eşelon forma getirilir. (Not: Satır eşelon forma getirmek de yeterlidir)

**Adım.3:** Baş elemanı olan 1 sayısını bulunduran kolona ait vektörler $V = Span(S)$ uzayı için bir baz oluşturur.

**Örnek:** $V = \mathbb{R}_3$ olsun. $\alpha_1 = [1\ 0\ 1]$, $\alpha_2 = [0\ 1\ 1]$, $\alpha_3 = [1\ 1\ 2]$, $\alpha_4 = [1\ 2\ 1]$, $\alpha_5 = [-1\ 1\ -2]$ olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ kümesi $V$'yi geren (kapsayan) olsun. Şimdi $S$'nin alt kümesi olan ve $V$'nin bazı olan $T$ kümesini bulalım.

**Adım.1:** $a_1[1\ 0\ 1] + a_2[1\ 0\ 1] + a_3[1\ 1\ 2] + a_4[1\ 2\ 1] + a_5[-1\ 1\ -2] = [0\ 0\ 0]$

**Adım.2:**

$$\left.\begin{aligned} a_1 + \quad + a_3 + a_4 - a_5 &= 0 \\ a_2 + a_3 + 2a_4 + a_5 &= 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 - 2a_5 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Ek matris (İnd. satır eşelon formu)} \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

**Adım.3:** Baş elemanlar 1, 2 ve 4 kolonlarıdır. Yani $T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ kümesi $\mathbb{R}_3$ için bir bazdır.

**Not:** $S$'nin yazılışında vektörlerin sırası değiştirilse $V$'nin farklı bir bazı elde edilebilir. Örneğin $\beta_1 = \alpha_5$, $\beta_2 = \alpha_4$, $\beta_3 = \alpha_3$, $\beta_4 = \alpha_2$, $\beta_5 = \alpha_1$ yazılırsa $S = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\}$ kümesinden $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \{\alpha_5, \alpha_4, \alpha_3\}$ bazı elde edilir.

Subject :

Date :...../...../.....

29.04.20

**Teorem:** Eğer $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ kümesi bir V vektör uzayının bazı ve $T=\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r\}$ lineer bağımsız vektörlerin bir kümesi ise $r\leq n$ dir.

S bir baz olduğundan V uzayındaki her vektör $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ cinsinden yazılabilir. Özellikle her $\beta_i$ için $\beta_i=a_{1i}\alpha_1+a_{2i}\alpha_2+\dots+a_{ni}\alpha_n$ $(i=1,2,\dots,r)$

T kümesi lineer bağımsız olduğu için

$c_1\beta_1+c_2\beta_2+\dots+c_r\beta_r=0 \Rightarrow c_1=c_2=c_3=\dots=c_r=0$ olmalı

$c_1(a_{11}\alpha_1+\dots+a_{n1}\alpha_n)+c_2(a_{12}\alpha_1+\dots+a_{n2}\alpha_n)+\dots+c_r(a_{1r}\alpha_1+\dots+a_{nr}\alpha_n)=0$

$(\sum c_j a_{1j})\alpha_1+(\sum c_j a_{2j})\alpha_2+\dots+(\sum c_j a_{nj})\alpha_n=0$

S bir baz olduğundan lineer bağımsızdır

$\sum c_j a_{1j}=\sum c_j a_{2j}=\dots=\sum c_j a_{nj}=0$ } n adet homojen denklem

n denklem, r bilinmeyen $(c_1,c_2,\dots,c_r)$ içerir. Eğer $r>n$ olsaydı bu homojen denklemin sıfırdan farklı çözümü olmak zorunda olurdu (bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazla) Ancak bu T'nin lineer bağımsızlığına aykırı.

★ Bir uzayın boyutu n ise n'den fazla sayıda lineer bağımsız vektör olamaz

**Sonuç:** Eğer $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ ve $T=\{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m\}$ bir V vektör uzayının bazları ise $n=m$'dir

**İspat:** S bir baz ve T lineer bağımsız olduğundan $m\leq n$'dir. Ayrıca T bir baz ve S lineer bağımsız olduğundan $n\leq m$'dir yani $n=m$'dir. Sonuç olarak "bir vektör uzayının her bazında aynı sayıda elemanı vardır" denir.

**Tanım:** Bir V vektör uzayının bir bazındaki elemanın sayısına (varsa ise) V'nin **boyutu** denir ve **boy(V)** ile gösterilir. $V=\{\theta\}$ ise $boy(V)=0$ olarak tanımlanır.

**Örnek:** $S=\{t^2,t,1\}$ kümesi $P_2$ için bir baz olup $boy(P_2)=3$'dür.

Subject :

Date :...../...../.....

**Örnek:** $\alpha_1 = [0\ 1\ 1]$, $\alpha_2 = [1\ 0\ 1]$, $\alpha_3 = [1\ 1\ 2]$ ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ olsun. $V = \text{span}(S)$, $\mathbb{R}_3$'ün alt uzayı olsun. V'deki her vektör $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$ şeklindedir. $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ olduğundan S lineer bağımlıdır. $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ dersek $\text{span}(S_1) = V$ olur. $S_1$ lineer bağımsız olduğundan $S_1$, V'nin bir bazıdır yani $\text{boy}(V) = 2$'dir.

**Sonuç:** V'nin boyutu n ise, V'deki lineer bağımsız en büyük küme (en fazla elemanlı küme) n elemanlıdır ve V'nin bir bazıdır.

**İspat:** $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k\} \subseteq V$ en büyük lineer bağımsız küme olsun. Eğer $\text{span}(S) = V$ ise S bir baz olup ispat biter.

Eğer $\text{span}(S) \neq V$ ise V'de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$'ların lineer kombinasyonları olarak yazılamayan bir $\alpha$ vektörü vardır. O zaman $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha\}$ lineer bağımsızdır. Bu da S'nin en büyük lineer bağımsız küme olmasıyla çelişir yani $V = \text{span}(S)$'dir. O halde S bir bazdır ve k=n'dir.

**Sonuç:** Eğer $\text{boy}(V) = n$ ise V'yi gören en küçük küme de n vektör vardır ve bu küme V'nin bir bazıdır. Yani $\text{boy}(V) = n$ ise $n+1$ elemanlı küme lineer bağımlıdır. Ayrıca $n+1$ elemanlı bir küme V'yi doğramaz.

**Sonuç:** $\text{boy}(V) = n$ ise $m > n$ elemanlı bir küme lineer bağımlı olmalıdır.

**Sonuç:** $\text{boy}(V) = n$ ise $m < n$ elemanlı bir küme V'yi doğramaz.

**Örnek:** $\text{boy}(\mathbb{R}^3) = 3$, $\text{boy}(\mathbb{R}_2) = 2$, $\text{boy}(\mathbb{R}^n) = n$, $\text{boy}(\mathbb{R}_n) = n$'dir. $\text{boy}(P_3) = 4$ dir. Çünkü $\{t^3, t^2, t, 1\}$ bir bazdır. Genelde $\text{boy}(P_n) = n+1$'dir.

**Tanım:** Sonlu elemanlı bir baz olan vektör uzayına **sonlu-boyutlu vektör uzayı** denir. Sonsuz sayıda elemanlı baz olan vektör uzayına **sonsuz-boyutlu vektör uzayı** denir. Örneğin; bütün polinomların vektör uzayı P sonsuz boyutludur.

Subject : Date :...../...../.....

**Teorem:** Eğer $S$ bir $n$-boyutlu $V$ vektör uzayının bir lineer bağımsız kümesi ise $V$'nin $S$'yi içeren bir $T$ bazı vardır.

**İspat:** $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ ve $m < n$ olsun $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$, $V$'nin bir bazı olsun.

$S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ olsun. $\mathrm{Span}(S_1) = V$ olduğundan $S_1$ kümesi $V$ için bir $T$ bazı içerir. $T$ bazı, $S_1$'den kendinden öncekilerin lineer kombinasyonu olanlar atılarak elde edilirdi. $S$ lineer bağımsız olduğundan $\alpha_i$'lerin hepsini atamazsın. Dolayısıyla $S \subseteq T$ olmalıdır.

**Örnek:** $\mathbb{R}_3$'de $\alpha = [1\ 0\ 1]$ vektörünü içeren bir baz bulunuz.

**Çözüm:** $\varepsilon_1 = [1\ 0\ 0]$, $\varepsilon_2 = [0\ 1\ 0]$, $\varepsilon_3 = [0\ 0\ 1]$ olmak üzere $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, $\mathbb{R}_3$'ün doğal bazıdır. $S_1 = \{\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ olsun. $\varepsilon_1$, $\alpha$'nın lineer kombinasyonu olmadığından $\varepsilon_1$'i alarak $\varepsilon_2$ vektörü $\alpha$ ve $\varepsilon_1$'in lineer kombinasyonu mudur? cevap hayır olduğu için $\varepsilon_2$'yi de alarak $\varepsilon_3$ vektörü $\alpha$, $\varepsilon_1$ ve $\varepsilon_2$'nin lineer kombinasyonu olduğundan $\varepsilon_3$'ü silerek istenen baz $\{\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$'dir.

**Teorem:** $V$, $n$-boyutlu bir vektör uzayı olsun.

(a) Eğer $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ lineer bağımsız ise $S$, $V$'nin bir bazıdır.

(b) Eğer $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ $V$'yi doğurur ise $S$, $V$'nin bir bazıdır.

**Örnek:** Aşağıdaki homojen sistemin çözüm uzayı $V$ için bir baz bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Jordan}]{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Genel çözüm

$$X = \begin{bmatrix} 3s + t \\ -3s - t \\ -s - \frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{bmatrix} \qquad X = s \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\left\{ \begin{matrix} s = 1 \\ t = 0 \end{matrix} \right\}$ ve $\left\{ \begin{matrix} s = 0 \\ t = 1 \end{matrix} \right\}$ verilirse $x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$(s, t \in \mathbb{R})$

Çözümler bulunur. $\mathrm{Span}(\{x_1, x_2\}) = V$ olduğu ayrıca $\{x_1, x_2\}$ lineer bağımsız olduğu için (çünkü oranlar kat olmadığından) çözüm uzayı için bir bazdır. Yani $\dim(V) = 2$

Subject :

Date :...../...../.....

# Koordinatlar ve İzomorfizmler

V bir vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, V'nin sıralı bir bazı olsun (yani S'deki vektörlerin bir yazılış sırası olsun). $\alpha \in V$ vektörü $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$ şeklinde (tek türlü) yazılır. Bu durumda $[\alpha]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ vektörüne $\alpha$'nın S sıralı bazına göre **koordinat vektörü** denir. $[\alpha]_S$'nin elemanlarına da $\alpha$'nın S'ye göre **koordinatları** denir.

**Örnek:** $P_1$'de $S = \{t, 1\}$ bir bazdır. $\alpha = p(t) = 5t - 2$ olsun. $[\alpha]_S = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ dir. $T = \{t+1, t-1\}$ de $P_1$'in bir bazdır. $\alpha = 5t - 2 = \frac{7}{2}(t+1) + \frac{3}{2}(t-1)$ olup $[\alpha]_T = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$ dir. Bazdaki yazılış sırası değiştirse koordinatlar da değişir.

**Örnek:** $\mathbb{R}^3$'de $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kanonik bir bazdır. $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ olsun. $\alpha = 3\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3$ olup $[\alpha]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ dir.

**Not:** $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ bir V vektör uzayının sıralı bazı, $\alpha \in V$ ve $\beta \in V$ olsun. $[\alpha]_S = [\beta]_S$ olsun. $[\alpha]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ ve $[\beta]_S = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ olsun. Yani $a_i = b_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ dir.

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n = \beta \text{ olup } \alpha = \beta \text{ dır}$$

Yani aynı sıralı bazda göre koordinatları aynı olan iki vektör eşittir.

## İzomorfizmler

$\alpha$ ve $\beta$, n-boyutlu bir V vektör uzayının elemanları olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ V'nin bir sıralı bazı olsun. $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$ ve $\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n$ olsun. $\alpha$ ve $\beta$ vektörlerine $\mathbb{R}^n$'de $[\alpha]_S$ ve $[\beta]_S$ vektörleri karşılık gelir. $\alpha \mapsto [\alpha]_S$, $\beta \mapsto [\beta]_S$

$\alpha + \beta = (a_1 + b_1)\alpha_1 + \dots + (a_n + b_n)\alpha_n$ olup $[\alpha + \beta]_S = [\alpha]_S + [\beta]_S$ dir. Yani $\alpha + \beta \mapsto [\alpha]_S + [\beta]_S$

Ayrıca $c\alpha = (ca_1)\alpha_1 + \dots + (ca_n)\alpha_n$ olup $[c\alpha]_S = c[\alpha]_S$ dir. $c\alpha \longmapsto c[\alpha]_S$

Yani cebirsel olarak V uzayı ile $\mathbb{R}^n$ uzayı "benzer" özellikler gösterir.

Subject: Date: ...../...../.....

**Tanım:** $V$, $\oplus$ ve $\odot$ işlemiyle bir vektör uzayı ve $W$ da $\boxplus$ ve $\boxdot$ işlemleriyle bir vektör uzayı olsun. Eğer $V$'den $W$ya 1-1 ve örten $L$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa $L$'ye $V$'den $W$ üzerine bir izomorfizm denir.

(a) $L(\alpha \oplus \beta) = L(\alpha) \boxplus L(\beta)$, (her $\alpha, \beta \in V$ için)

(b) $L(c \odot \alpha) = c \boxdot L(\alpha)$, (her $\alpha \in V$, $c \in \mathbb{R}$ için)

Bu durumda $V$, $W$ya izomorfiktir denir.

**Not:** $V$, $W$ya izomorfik ise $W$da $V$ye izomorfiktir. Bu durumda $V$ ile $W$ izomorfiktirler diyebiliriz.

**Not:** Eğer $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ için $L(\alpha_1) = L(\alpha_2) \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ olıyorsa $L$'ye 1-1'dir denir. Eğer her $\beta \in W$ için $L(\alpha) = \beta$ olacak şekilde en az bir $\alpha \in V$ varsa $L$'ye örtendir denir.

Örnek:

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$ dönüşümü örtendir.

Gösterelim:

$\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ verilsin $L(\alpha) = \beta$ olacak şekilde $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ arıyoruz ($a_1, a_2, a_3$ için $b_1, b_2$ cinsinden her zaman bulunabilmesi gerekir)

$$L(\alpha) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow a_1 = b_2,\ a_2 = b_1 - b_2 \text{ ve } a_3 \in \mathbb{R}$$

elde ederiz. Yani $L$ örtendir. Ama $L$ 1-1 değildir çünkü

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ve } \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ için } L(\alpha_1) = L(\alpha_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

İzomorfik uzayların elemanları farklıdır, ama cebirsel özellikleri aynıdır.

Subject :

Date :...../...../.....

**Teorem:** Eğer $V$, $n$-boyutlu bir vektör uzayı ise $V$, $\mathbb{R}^n$'ye izomorftur.

**İspat:** $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ $V$'nin bir sıralı bazı olsun. $L: V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu

$$L(\alpha) = [\alpha]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$ olarak tanımlansın.

Burada $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$ olduğu açıktır. $L$'nin bir izomorfizm olduğunu gösterelim.

<u>$L$ 1-1 dir:</u> $\alpha, \beta \in V$ olsun. $L(\alpha) = L(\beta)$ olsun. Yani $[\alpha]_S = [\beta]_S$ olsun. (Bu iki vektörün $S$'ye göre koordinatları aynı olsun). "Aynı baza göre koordinatları aynı olan iki vektör eşittir." O halde $\alpha = \beta$ dır.

<u>$L$ örtendir:</u> $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ verilsin. $\alpha = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n$ seçilirse $L(\alpha) = \beta$ olduğu açıktır. Yani $L$ örtendir.

Şimdi de tanımda verilen iki şartın sağlandığını gösterelim: $\alpha, \beta \in V$ verilsin.

$[\alpha]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ ve $[\beta]_S = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ olsun. $[\alpha+\beta]_S = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}$ ve $c \in \mathbb{R}$ için $[c\alpha]_S = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix}$

olduğu açıktır. O halde;

$$L(\alpha+\beta) = [\alpha+\beta]_S = [\alpha]_S + [\beta]_S = L(\alpha) + L(\beta) \quad \text{ve}$$

$$L(c\alpha) = [c\alpha]_S = c[\alpha]_S = cL(\alpha)$$ olup $L$ dönüşümü iki şartı sağladığından

$V$ vektör uzayı $\mathbb{R}^n$'e izomorftur.

**Lemma:** $L: V \to W$ bir izomorfizm olsun. O zaman

(a) $L(\theta_V) = \theta_W$

(b) $L(\alpha - \beta) = L(\alpha) - L(\beta)$ (her $\alpha, \beta \in V$ için)

**İspat (a):** $L$ bir izomorfizm olduğundan $\theta_V + \theta_V = \theta_V \Rightarrow L(\theta_V + \theta_V) = L(\theta_V)$

$$\Rightarrow \underbrace{L(\theta_V)}_{\in W} + \underbrace{L(\theta_V)}_{\in W} = \underbrace{L(\theta_V)}_{\in W}$$

$\Rightarrow L(\theta_V) = \theta_W$ ($L(\theta_V)$ sadeleştirme)

**İspat (b):** $L(-\beta) = L((-1)\beta) = (-1)L(\beta) = -L(\beta)$ elde edilir. Daha sonra

$L(\alpha - \beta) = L(\alpha + (-1)\beta) = L(\alpha) + L((-1)\beta) = L(\alpha) + (-L(\beta)) = L(\alpha) - L(\beta)$

Subject :

Date :...../...../.....

**Teorem:** İzomorfik olma bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlar

(a) Her $V$ vektör uzayı kendine izomorfiktir

$L: V \to V$, her $\alpha \in V$ için $L(\alpha) = \alpha$ birim (özdeşlik) dönüşümünün bir izomorfizma olması

(b) $V, W$ ya izomorfik ise $W$ de $V$ ye izomorfiktir

$L: V \to W$ bir izomorfizma ise $L^{-1}: W \to V$ dönüşümünün bir izomorfizma olduğu gösterilerek ispat edilir ($L$ 1-1 ve örten olduğundan $L^{-1}$ mevcuttur)

(c) $U, V$ ye; $V$ de $W$ ya izomorfik ise $U, W$ ya izomorfiktir

$L_1: U \to V$, $L_2: V \to W$ iki izomorfizma ise $L_2 \circ L_1: U \to W$ bileşke dönüşümünün bir izomorfizma olması

**Teorem:** Sonlu boyutlu iki vektör uzayının izomorfik olmaları için gerek ve yeter şart boyutlarının eşit olmalarıdır

İspat ($\Leftarrow$): $V$ ve $W$ $n$-boyutlu iki uzay olsun. $V$ ile $R^n$ izomorfiktir ve $W$ ile $R^n$ izomorfiktir

Bu durumda $V$ ile $W$ izomorfiktir

İspat ($\Rightarrow$): $V$ ile $W$ izomorfik olsunlar. $L: V \to W$ bir izomorfizma olsun ve $boy(V) = n$ olsun.

$boy(W) = n$ olduğunu göstermek için:

$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, $V$nin bir sıralı bazı olsun

$T = \{L(\alpha_1), L(\alpha_2), \dots, L(\alpha_n)\}$ kümesinin $W$nun bir bazı olduğunu göstereceğiz:

$Span(T) = W$ dir: $\beta \in W$ olsun. $L$ örten olduğundan bir $\alpha \in W$ için $L(\alpha) = \beta$ dır. ($\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$)

$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n \overset{L}{=\!=} a_1 L(\alpha_1) + a_2 L(\alpha_2) + \dots + a_n L(\alpha_n)$ olup $Span(T) = W$ dir

$T$ lineer bağımsızdır:

$a_1 L(\alpha_1) + a_2 L(\alpha_2) + \dots + a_n L(\alpha_n) = \theta_W$ olsun. $L$ bir izomorfizma olduğundan $L(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n) = \theta_W$

$L(\theta_V) = \theta_W$ ve $L$ 1-1 olduğundan $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = \theta_V$ olmalıdır. $S$ lineer bağımsız olduğundan

$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ elde edilir. Yani $T$ lineer bağımsızdır

Sonuç olarak; $T$, $W$ nin bir bazıdır. $T$ kümesi altında $S$ kümesinin görüntüsüdür. $S$ kümesi $n$-elemanlı olduğundan ve $L$ 1-1 olduğundan $T$ kümesi de $n$-elemanlıdır. O halde $boy(W) = n$ dir

Subject : Date :...../...../.....

**Sonuç:** V sonlu boyutlu ise ve $\mathbb{R}^n$'e izomorfik ise $boy(V) = n$ dir. $P_n$ ile $\mathbb{R}^{n+1}$ ve $R_{n+1}$ izomorfiktir ancak boyutları $(n+1)$ dir.

# Dönüşüm Matrisleri

$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ve $T = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ bir n-boyutlu V vektör uzayı için iki sıralı baz olsun $\alpha \in V$ için

$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n$ şeklinde ise $[\alpha]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ dir. O halde

$$[\alpha]_T = [c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n]_T = c_1[\alpha_1]_T + c_2[\alpha_2]_T + \dots + c_n[\alpha_n]_T$$

$[\alpha_j]_T = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ olsun. O zaman

$$[\alpha]_T = c_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \dots + c_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

veya $P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$ olmak üzere $[\alpha]_T = P[\alpha]_S$ dir. Burada

P matrisine S-bazından T-bazına **dönüşüm matrisi** denir.

**Örnek:** P singular midir, değil midir?

Bir $\alpha$ için $P[\alpha]_S = \theta_{2n}$ olsun yani $P[\alpha]_S = [\alpha]_T = \theta_{2n}$ dir.

$\alpha = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \dots + b_n\beta_n$ ise $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [\alpha]_T = \theta_{2n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ olur.

Yani $\alpha = 0\beta_1 + 0\beta_2 + \dots + 0\beta_n = \theta_V$ dir. O halde $[\theta]_S = \theta_{2n}$ olur. O zaman $PX = 0$ homojen sistemin tek çözüm trivial çözümdür. Buradan <u>P'nin singular olmaması</u> gerekir. Bu durumda $[\alpha]_S = P^{-1}[\alpha]_T$ olup $P^{-1}$ de T-bazından S-bazına dönüşüm matrisi olur. $P^{-1}$'in j-inci kolonu $[\beta_j]_S$ dir.

Subject : Date :...../...../.....

Örnek: $V = \mathbb{R}^3$ olsun.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \text{ ve } T = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ kümeleri V nin

sıralı bazları olsun S-bazından T-bazına dönüşüm matrisini bulalım

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\alpha_1]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\alpha_2]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [\alpha_3]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ → dönüşüm matrisi

---

$\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$ verilsin. $[\alpha]_T$ yi bulmak için $\alpha$yı S deki vektörler cinsinden yazalım

$$\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$ olup $[\alpha]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ dir.

Bu durumda $[\alpha]_T = P\,[\alpha]_S = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow [\alpha]_T$

$$P^{-1} = Q = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ (Q : T bazından S-bazına dönüşüm matrisi)

Subject : Date :...../...../.....

Örnek: $V = P_1$ vektör uzayının iki sıralı bazı $S = \{t-1, t+1\}$ ve $T = \{t, t-2\}$ olsun.

$$\alpha_1 = t-1 = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}(t-2) \Rightarrow [\alpha_1]_T = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = t+1 = \frac{3}{2}t + \left(-\frac{1}{2}\right)(t-2) \Rightarrow [\alpha_2]_T = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

S'den T'ye dönüşüm matrisi $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

Mesela, $\alpha = 5t+1$ için S bazına göre koordinatları $[\alpha]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ise, $\alpha$'nın T bazına göre koordinatları:

$$[\alpha]_T = P \cdot [\alpha]_S = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \text{ olmalıdır.}$$

Gerçekten de $\alpha = 5t+1 = \frac{11}{2}t + \left(-\frac{1}{2}\right)(t-2)$ olduğu görülür. Ve sırasıyla T-bazından S-bazına dönüşüm matrisi $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ dir.

Örnek: $\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\beta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olsun. $T = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, $R^3$'ün bir bazı.

$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ olsun. S'den T'ye dönüşüm matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ise S'yi bulunuz.

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 0$$

$$\beta_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow b_1 = 2,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0$$

$$\beta_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = 3,\ c_2 = 1,\ c_3 = 3$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

Subject : Date :...../...../.....

06.05.26

# Gram-Schmidt Yöntemi

**Teorem:** V bir iç çarpım uzayı ve $\{\theta\} \neq W$ alt uzayı da $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ olan bir alt uzay olsun. W'nun bir $T = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ ortanormal bazı vardır.

**ispat:** $T^* = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ ortogonal bazını bulalım

$\beta_1 = \alpha_1$ (başka $\alpha_i$ de seçilebilir), $W = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $W_1 = \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2\}$

$\beta_2 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = a_1\beta_1 + a_2\alpha_2$

$$\langle \beta_1, \beta_2 \rangle = \langle \beta_1, a_1\beta_1 + a_2\alpha_2 \rangle = \langle \beta_1, a_1\beta_1 \rangle + \langle \beta_1, a_2\alpha_2 \rangle$$

$$= a_1\langle \beta_1, \beta_1 \rangle + a_2\langle \beta_1, \alpha_2 \rangle$$

$$0 = a_1\langle \beta_1, \beta_1 \rangle + a_2\langle \beta_1, \alpha_2 \rangle$$

$$\Rightarrow a_1 = -a_2 \frac{\langle \beta_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}$$

$a_2 = 1$ seçilirse (işlem kolaylığı için) $a_1 = -\dfrac{\langle \beta_1, \alpha_2 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}$

$$\beta_2 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = a_1\beta_1 + \alpha_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \Rightarrow \beta = -\frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}$$

$\text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = W_2$, $W_2 = \text{Span}\{\beta_1, \beta_2, \alpha_3\}$

$\beta_3 = b_1\beta_1 + b_2\beta_1 + b_3\alpha_3$ $\quad b_3 = 1$ için $\beta_3 = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \alpha_3$

$\beta_1$ ile iç çarpım: $0 = \langle \beta_3, \beta_1 \rangle = \langle b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \alpha_3, \beta_1 \rangle = b_1\langle \beta_1, \beta_1 \rangle + \langle \alpha_3, \beta_1 \rangle$

$\beta_2$ ile iç çarpım: $0 = \langle \beta_3, \beta_2 \rangle = \langle b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \alpha_3, \beta_2 \rangle = b_2\langle \beta_2, \beta_2 \rangle + \langle \alpha_3, \beta_2 \rangle$

$$\Rightarrow \beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}\beta_2 \qquad b_1 = \frac{-\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \quad b_2 = \frac{-\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}$$

Benzer şekilde,

$$\beta_4 = \alpha_4 - \frac{\langle \alpha_4, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle}\beta_1 - \frac{\langle \alpha_4, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle}\beta_2 - \frac{\langle \alpha_4, \beta_3 \rangle}{\langle \beta_3, \beta_3 \rangle}\beta_3$$

$T^* = \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$ ortogonal küme

$T^*$ kümesi, W uzayı için bir bazdır. $i = 1, 2, \dots, n$ için $\gamma_i = \dfrac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$

$T = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n\}$ ortonormal baz olur

Subject :

Date :...../...../.....

**Örnek:** $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\mathbb{R}^3$ vektör tam $\mathbb{C}$'yi $T = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ ortonormal bazına dönüştür

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{-2}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2/3}{6/9} \cdot \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

**Örnek:** $V = P_2$ olsun $\left( \langle \alpha(t), \beta(t) \rangle = \int_0^1 \alpha(t)\beta(t)\,dt \right)$

$W$'da $S = \{t^2, t\}$ tarafından üretilen alt uzay olsun. $W$ için bir ortonormal baz bulunuz

$$\beta_1 = \alpha_1 = t^2$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1$$

$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow \langle \beta_1, \beta_1 \rangle = \int_0^1 t^2 t^2\,dt = \int_0^1 t^4\,dt = \left(\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{5} \\ &\rightarrow \langle \alpha_2, \beta_1 \rangle = \int_0^1 t \cdot t^2\,dt = \int_0^1 t^3\,dt = \left(\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \beta_2 = t - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}} t^2 = t - \frac{5}{4} t^2$$

$$\langle \beta_2, \beta_2 \rangle = \int_0^1 \left(t - \frac{5}{4} t^2\right)^2 dt = \frac{1}{48}$$

$$\left\{ \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} \right\} = \left\{ \sqrt{5}\, t^2, \sqrt{48} \left(t - \frac{5}{4} t^2\right) \right\}$$

**Not:** $\beta_1 = \alpha_2$ seçilseydi $\beta_1 = t$, $\alpha_2 = t^2$ olacak ve ortonormal baz da $\{\sqrt{3}\, t, \sqrt{10}\left(t^2 - \frac{3}{5}\right)\}$

↳ Sıralı olarak yapılan seçimler önemli

Subject: Date: ...../...../.....

**Teorem:** $V$, $n$-boyutlu bir öklidyen uzay, $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ de $V$ nin bir ortonormal bazı olsun. Eğer $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$ ve $\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n$ ise

$\langle \alpha, \beta \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ şeklinde olmaktır

**İspat:** $S$ ortonormal olduğundan $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{ise } i=j \\ 0 & \text{ise } i \neq j \end{cases}$ dır o halde;

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n, b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_n\alpha_n \rangle$$

$$= a_1b_1\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + \cancel{a_1b_2\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle} + \dots + \cancel{a_1b_n\langle \alpha_1, \alpha_n \rangle}$$

$$+ \cancel{a_2b_1\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle} + a_2b_2\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle + \dots + \cancel{a_2b_n\langle \alpha_2, \alpha_n \rangle} \dots$$

$$+ a_nb_n\langle \alpha_n, \alpha_n \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

**Sonuç:** $T$ bir $V$ vektör uzayının ortonormal bazı ve $\alpha \in V$ için

$$[\alpha]_T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ ise } \|\alpha\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

**Örnek:** $V = \mathbb{R}_3$ olsun $W$ da $S = \{[2\ 1\ 1], [1\ 1\ 2]\}$ tarafından üretilen bir alt uzay olsun. $\alpha = [5\ 3\ 4] \in W$ olsun. $\|\alpha\|$ nedir?

$$\alpha = [5\ 3\ 4] = 2[2\ 1\ 1] + 1[1\ 1\ 2] \Rightarrow [5\ 3\ 4]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

koordinatlar

$\sqrt{S}$ ortonormal olmalı

Gram Schmidt metodu ile ortogonal bazı $\{[2\ 1\ 1], [-\frac{4}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{7}{6}]\}$ veya $\{[2\ 1\ 1], [-4, 1, 7]\}$

ortonormal bazı $T = \{[\frac{2}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}], [\frac{-4}{\sqrt{66}}\ \frac{1}{\sqrt{66}}\ \frac{7}{\sqrt{66}}]\} \longrightarrow [\alpha]_T = \begin{bmatrix} \frac{19\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{66}}{6} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \|\alpha\| = \sqrt{\left(\frac{19\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{66}}{6}\right)^2} = \sqrt{50}$$

**Teorem:** $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ kümesi bir $V$ vektör uzayı için ortonormal bir baz ve $\alpha \in V$ olsun $i = 1, 2, \dots, n$ için $c_i = \langle \alpha, \alpha_i \rangle$ olmak üzere

$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n$ dir

**Örnek:** $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \right\}$ $\mathbb{R}^3$ için bir ortonormal bazdır. $\alpha = \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ verilmiş olsun.

$i = 1, 2, 3$ için $c_i = \langle \alpha, \alpha_i \rangle \Rightarrow$

$$c_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right\rangle = 9$$

$$c_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \right\rangle = 9$$

$$c_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \right\rangle = 9$$

$$9\alpha_1 + 9\alpha_2 + 9\alpha_3 = \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha$$

Subject :

Date :...../...../.....

# Lineer dönüşümler ve matrisler

**Tanım:** $V$ ve $W$ iki vektör uzayı olsun $L: V \to W$ bir fonksiyon olsun. Eğer;

a) $\forall \alpha, \beta \in V$ için $L(\alpha+\beta) = L(\alpha) + L(\beta)$

b) $\forall c \in \mathbb{R}$ ve $\forall \alpha \in V$ için $L(c\alpha) = cL(\alpha)$ ise,

$L$'ye $V$'den $W$'ya bir lineer dönüşüm denir. Eğer $V=W$ ise $L$'ye $V$ üzerinde bir lineer operatör denir.

$L(\alpha+\beta) = L(\alpha) + L(\beta)$ — $V$'deki toplama, $W$'deki toplama

$L(c\alpha) = cL(\alpha)$ — $V$'deki çarpma, $W$'deki çarpma

} nasıl tanımlandığı önemli!

**Not:** $L: V \to W$ lineer dönüşüm + 1-1 ve örten $\Leftrightarrow$ izomorfizm

**Lemma:** $L: V \to W$ fonksiyonunun bir lineer dönüşüm olması için gerek ve yeter şart; her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \alpha, \beta \in V$ için $L(a\alpha + b\beta) = aL(\alpha) + bL(\beta)$ dır

**Ispat ($\Rightarrow$):** $L$ bir lineer dönüşüm olsun

$$L(a\alpha + b\beta) = \underbrace{L(a\alpha) + L(b\beta)}_{1.\ \text{koşul}} = \underbrace{aL(\alpha) + bL(\beta)}_{2.\ \text{koşul}}$$

**($\Leftarrow$):** $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \alpha, \beta \in V$ için $L(a\alpha + b\beta) = aL(\alpha) + bL(\beta)$ olsun $a=1$ ve $b=1$ için,

$$L(\alpha+\beta) = L(\alpha) + L(\beta)$$

$a = c$ ve $b = 0$ alınırsa; $L(c\alpha) = cL(\alpha)$ olur

**Örnek:** $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L = \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ ; $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$L(\alpha+\beta) = L\left(\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}_{L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right)\ L(\alpha)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{L\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right)\ L(\beta)} = L(\alpha) + L(\beta)$$

$$L(c\alpha) = L\left(\begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ ca_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \end{bmatrix} = c\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}_{L(\alpha)} = cL(\alpha)$$

$\Rightarrow$ $L$ lineer dönüşümdür. Lineer operatör değildir ($V \neq W$)

$L$'ye projeksiyon (izdüşüm) denir ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$)

Subject : Date :...../...../.....

Örnek: $L: P_2 \to P_1$

$L(at^2+bt+c) = 2at+b$ olsun $\Rightarrow$ lineer dönüşümdür (şartları sağlar)

Örnek: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $r \in \mathbb{R}$ bir skaler olmak üzere,

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = r \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ lineer dönüşüm

$\longrightarrow$ lineer operatör

$r>1$ için L uzama

$0<r<1$ için L büzülme

Örnek: $L: P_2 \to \mathbb{R}$, $L(at^2+bt+c) = \int_0^1 (at^2+bt+c)\,dt$ lineer dönüşümdür

Örnek: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

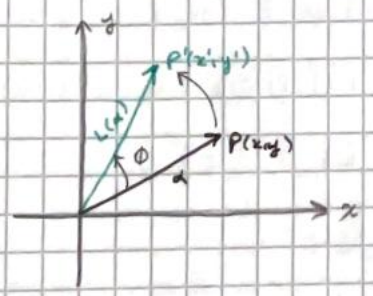
$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$ lineer dönüşümdür

Örnek: A bir matris ve $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L(\alpha) = A\alpha$ lineer dönüşümdür

Örnek: $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\alpha$ vektörünü $\phi$ açısı kadar döndürür buna rotasyon (dönme) denir




## Uygulama sorusu

$L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1+1 \\ 2a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ bir lineer dönüşüm midir? Lineer dönüşüm değildir

Subject :

Date :...../...../.....

**Tanım:** $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. $V$ de $n$-boyutlu bir vektör uzayı olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$, $V$'nin bir bazı olsun. $\alpha \in V$ ise $L(\alpha)$ elemanı $\{L(\alpha_1), L(\alpha_2), \dots, L(\alpha_n)\}$ elemanları ve elinden tamamen belirlenir. 20.05.26

**İspat:** $\alpha \in V$ ve $S$ bir baz olduğ. için $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$ şeklinde ifade edilebilir

$L(\alpha) = L(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n) = L(a_1\alpha_1) + L(a_2\alpha_2) + \dots + L(a_n\alpha_n) \longrightarrow$ toplamsallık özelliği

$= a_1L(\alpha_1) + a_2L(\alpha_2) + \dots + a_nL(\alpha_n) \longrightarrow$ skalerle çarpım özelliği

**Not:** $L: V \to W$, $T: V \to W$ iki lineer dönüşüm olsun. $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, $V$'nin bir bazı olsun. Eğer $i = 1, 2, \dots, n$ için $L(\alpha_i) = T(\alpha_i)$ ise o zaman $\forall \alpha \in V$ için $L(\alpha) = T(\alpha)$ dır. Yani $L = T$ dir.

**Örnek:** $L: \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}_2$ bir lineer dönüşüm olsun.

$\alpha_1 = [1\ 0\ 1\ 0]$, $\alpha_2 = [0\ 1\ -1\ 2]$, $\alpha_3 = [0\ 2\ 2\ 1]$, $\alpha_4 = [1\ 0\ 0\ 1]$ ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ $\mathbb{R}_4$'ün bir bazı olsun. $\alpha = [3\ -5\ -5\ 0]$ ise $L(\alpha)$ nedir? ($L(\alpha_1) = (1,2)$, $L(\alpha_2) = [0\ 1]$, $L(\alpha_3) = [0\ 0]$, $L(\alpha_4) = [2\ 0]$)

$a_1[1\ 0\ 1\ 0] + a_2[0\ 1\ -1\ 2] + a_3[0\ 2\ 2\ 1] + a_4[1\ 0\ 0\ 1] = [3\ -5\ -5\ 0]$

$a_1 + a_4 = 3 \qquad a_2 + 2a_3 = -5 \qquad a_1 - a_2 + 2a_3 = -5 \qquad 2a_2 + a_3 + a_4 = 0$

$a_1 = 2 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = -3 \qquad a_4 = 1$

$L(\alpha) = a_1L(\alpha_1) + a_2L(\alpha_2) + a_3L(\alpha_3) + a_4L(\alpha_4) = 2L(\alpha_1) + L(\alpha_2) - 3L(\alpha_3) + L(\alpha_4)$

$= 2[1\ 2] + [0\ 1] - 3[0\ 0] + [2\ 0]$

$L(\alpha) = [4\ 7]$

Subject :

Date :...../...../.....

**Teorem:** $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun.

a) $L(\theta_V) = \theta_W$

b) $L(\alpha - \beta) = L(\alpha) - L(\beta)$ $(\forall \alpha, \beta \in V$ için$)$

## Bir lineer dönüşümün çekirdeği ve görüntüsü

Eğer bir lineer dönüşüm fonksiyon olarak birebir ise bu dönüşüme 1-1 lineer dönüşüm denir.

$L: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun.

$[\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow L(\alpha_1) \neq L(\alpha_2)] \vee [L(\alpha_1) = L(\alpha_2) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2]$ ise $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in V$ için

$L$ birebir bir lineer dönüşümdür

Örnek: $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{bmatrix}$ olsun

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} & L(\alpha_1) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{bmatrix} \\ \alpha_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} & L(\alpha_2) = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix} \end{array}\right\} L(\alpha_1) = L(\alpha_2) \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = b_1 \text{ ve } a_2 = b_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$L$ birebir bir lineer dönüşümdür.

Örnek: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \end{bmatrix}$ olsun. $L$ birebir lineer dönüşüm değildir.

mesela, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right)$ fakat $a_2 \neq b_2$ için kural sağlanmaz.

★ **Tanım:** $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. $L$'nin çekirdeği $Ker(L) = \{\alpha \in V : L(\alpha) = \theta_W\}$ kümesi olarak tanımlanır. $L(\theta_V) = \theta_W$ olup çekirdek en az bir elemanlıdır, $Ker(L) \neq \emptyset$ dir.

Örnek: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$

$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ için $a_1 = a_2 = 0$ ve $a_3 \in \mathbb{R}$ yani $Ker(L) = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}$

Subject : Date :...../...../.....

**Teorem:** $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun

a) $Çek(L)$, $V$'nin bir alt uzayıdır.

b) $L$ birebir dir $\iff Çek(L) = \{\theta_V\}$

**Örnek:** (sınav sorusu) $L: P_2 \to \mathbb{R}$, $L(at^2+bt+c) = \int_0^1 (at^2+bt+c)\,dt$ lineer dönüşümü veriyor.

$Çek(L)$ uzayını ve boyutunu bulunuz.

$\left(\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} + ct\right)\Big|_0^1 = 0$ olmalı $\quad \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 \quad a = \left(-\frac{b}{2} - c\right)\cdot 3$

$\alpha = at^2+bt+c$ örneğin $b=0,\ c=1,\ a=3$

$\alpha_1 = -3t^2+1$

$c = -\frac{a}{3} - \frac{b}{2} \quad \alpha = at^2+bt+c \quad \alpha = at^2 + bt - \frac{a}{3} - \frac{b}{2}$

$= a\underbrace{\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)}_{\alpha_1} + b\underbrace{\left(t - \frac{1}{2}\right)}_{\alpha_2}$ lineer bağımsız $(\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)$

$\alpha_1 = t^2 - \frac{1}{3} \quad \alpha_2 = t - \frac{1}{2}$

$Çek(L) = Span\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $boy(Çek(L)) = 2$ dir (V den)

→ birebir değil

**Tanım:** $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. $L$'nin görüntüsü (veya $V$'nin $L$ altındaki görüntüsü)

$G(L) = \{w \in W,\ \text{bir } v \in V \text{ için } L(v) = w\}$ kümesi olarak tanımlanır.

Öyle ki $L(\alpha) = \beta$ dır. Eğer $G(L) = W$ ise $L$'ye örten (üzerine) lineer dönüşümler dir.

**Teorem:** $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun $G(L)$, $W$'nun alt uzayıdır.

**Örnek:** $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ olsun $L$ örten midir?

$\beta = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $L(\alpha) = \beta$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{R}^3$ ??

$L(\alpha) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = c,\ a_2 = d$

$L(\alpha) = \beta$ olacak şekilde $(a_3 \in \mathbb{R})$ $L$ örtendir $G(L) = \mathbb{R}^2$ $\quad boy(G(L)) = 2$

Subject : Date :...../...../.....

**Örnek:** $L: P_2 \to \mathbb{R}$, $L(at^2+bt+c) = \int_0^1 (at^2+bt+c)\,dt$ lineer dönüşüm veriyor. boy$(G(L)) = ?$

$L(at^2+bt+c) = \int_0^1 (at^2+bt+c)\,dt = \left(\frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} + ct\right)\Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$ $\quad a \neq 0, b \neq 0, c = 0$ ön. W olan örtendir. boy$(G(L)) = 1$ dir

**Örnek:** (Sınav sorusu) $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ; boy$(G(L)) = ?$

$\forall \beta \in \mathbb{R}^3$ için $\alpha \in \mathbb{R}^3$ ??

$$\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad L(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} a_1 + a_3 & a \\ a_1 + a_2 + 2a_3 & b \\ 2a_1 + a_2 + 3a_3 & c \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right]$$

yalnızca $c - b - a = 0$ olayında çözüm var. Dolayısıyla L örten değil.

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_3 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 \\ 2a_1 + a_2 + 3a_3 \end{bmatrix}$$

$L(\alpha) = m_1 L(\alpha_1) + m_2 L(\alpha_2) + m_3 L(\alpha_3)$

$$\Rightarrow a_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\alpha_1} + a_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\alpha_2} + a_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 \\ \text{lineer bağımlı}}} \longrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{boy}(G(L)) = 2$$

**Örnek:** $L: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $L([a_1\ a_2\ a_3\ a_4]) = [a_1 + a_2 \quad a_3 + a_4 \quad a_1 + a_3]$ olarak tanımlanan, $G(L) = ?$

$L([a_1\ a_2\ a_3\ a_4]) = a_1[1\ 0\ 1] + a_2[1\ 0\ 0] + a_3[0\ 1\ 1] + a_4[0\ 1\ 0]$

$$\Rightarrow \{[1\ 0\ 1], [1\ 0\ 0], [0\ 1\ 1], [0\ 1\ 0]\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \{[1\ 0\ 1], [1\ 0\ 0], [0\ 1\ 1]\}$$

boy$(G(L)) = 3$

Subject : Date :...../...../.....

**Not:** boy(Çek(L)) + boy(G(L)) = boy(L tanım kümesi)

**Teorem:** $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm ve $n$-boyutlu bir uzay ise

$$boy(Çek(L)) + boy(G(L)) = n$$

**Tanım:** $L: V \to W$ lineer dönüşüm ise boy(Çek(L)) sayısına L'nin sıfırlığı denir

**Sonuç:** $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm ve $\underline{boy(V) = boy(W)}$ olsun

a) L birebir ise örtendir

b) L örten ise birebirdir

**Teorem:** $L: V \to W$ lineer dönüşümü tersi vardır $\Leftrightarrow$ L birebir ve örtendir. Ayrıca $L^{-1}$ de bir lineer dönüşümdür. $(L^{-1})^{-1} = L$

**Örnek:** $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ olarak tanımlanan

Çek(L) = {θ} birebirdir
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ yani V = W örtendir yani tersi vardır

$L(\alpha) = L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right)$ ; $\beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = b_1 \\ 2a_1 + 2a_2 + a_3 = b_2 \\ a_2 + a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$L^{-1}\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - b_3 \\ -2b_1 + b_2 + b_3 \\ 2b_1 - b_2 \end{bmatrix}$$

Subject : Date :...../...../.....

**Teorem:** $L: V \to W$ lineer dönüşümün birebir olması için gerek ve yeter şart $V$ deki lineer bağımsız her kümenin görüntüsünün $W$ da lineer bağımsız olmasıdır.

**Sonuç:** $L: V \to W$ lineer dönüşüm ve $boy(V) = boy(W)$ olsun.

$L$ birebirdir (yani tersi vardır) $\iff$ $V$ deki bir bazın görüntüsü $W$ nun bir bazıdır.

**Not:** $A$ $n \times n$ matris olsun. $B$ ne göre aşağıdakiler denktir.

- $A$ tekil değildir
- $AX = 0$ ın sadece trivial çözümü vardır
- $A$, $I_n$ in satır (sütun) eşdeğeridir
- $AX = B$ sistemi her $n \times 1$ $B \in \mathbb{R}^n$ matrisi için tek çözüme sahiptir
- $A$ elementer matrislerin bir çarpımıdır
- $A$ nın rankı $n$ dir
- $A$ nın satırları (sütunları) $\mathbb{R}_n$ de ($\mathbb{R}^n$ de) lineer bağımsızdır
- $AX = 0$ çözüm uzayının boyutu sıfırdır
- $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $L(x) = AX$ $(X \in \mathbb{R}^n)$ ile tanımlanan lineer dönüşüm birebir ve örtendir

03.06.26

## Bir Lineer Dönüşümün Matrisi

**Teorem:** $L: V \to W$ lineer dönüşüm, $V$ $n$-boyutlu ve $W$ $m$-boyutlu vektör uzayları $(n \neq 0, m \neq 0)$ ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ve $T = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ de sırasıyla $V$ ve $W$ nun sıralı bazları olsun. $j$ sütun $L(\alpha_j)$ nin $T$ nin koordinatları, $[L(\alpha_j)]_T$ olan $m \times n$ tipindeki $A$ matrisi şu özelliği sağlar. $\alpha \in V$ için $L(\alpha) = \beta$ ise o zaman $[\beta]_T = A.[\alpha]_S$ dir.

**Örnek:** $L: P_2 \to P_1$, $L(p(t)) = p'(t)$ olsun. $S = \{\underset{\alpha_1}{t^2}, \underset{\alpha_2}{t}, \underset{\alpha_3}{1}\}$, $T = \{\underset{\beta_1}{t}, \underset{\beta_2}{1}\}$; $L$ dönüşümü sağlayan $A$ matrisini bulun.

$L(t^2) = 2t = 2.t + 0.1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $L(t) = 1 = 0.t + 1.1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $L(1) = 0 = 0.t + 0.1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Subject :

Date :...../...../.....

Öndeki örneğin devamı

Örnek: $P(t) = 5t^2 - 3t + 2 \Rightarrow L(p(t)) = 10t - 3$

$[L(p(t))]_T = A \cdot [p(t)]_S$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$[L(p(t))]_T = 10 \cdot t + (-3) \cdot 1 = 10t - 3$

Örnek: $L: P_2 \to P_1$ ; $L(p(t)) = p'(t)$

$S = \{1, t, t^2\}$ , $T = \{t, 1\}$ , $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Örnek: $L: P_2 \to P_1$ , $L(p(t)) = p'(t)$ olsun

$S = \{t^2, t, 1\}$ , $T = \{t+1, t-1\}$ de $P_2$ ve $P_1$ için sıralı bazlar olsunlar

Buna göre A dönüşüm matrisi bulunuz

$$\left.\begin{array}{l} L(t^2) = 2t = 1(t+1) + 1(t-1) \to \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ L(t) = 1 = \frac{1}{2}(t+1) + (-\frac{1}{2})(t-1) \to \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \\ L(1) = 0 = 0(t+1) + 0(t-1) \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\} A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $p(t) = 5t^2 - 3t + 2$ $\quad [L(p(t))]_T = A\,[p(t)]_S$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/2 \\ 13/2 \end{bmatrix}$$

Örnek: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , $\varepsilon_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , $\varepsilon_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ; $\bar{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , $\bar{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ standart bazlar olduğundan A aynı kaldı

Subject : Date : ...../...../.....

Örnek: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ olsun

$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Notlar:

1) Birim lineer operatörün herhangi bir baza göre temsili $I_n$ dir ($V$ $n$-boyutlu)

2) $L: V \to V$ ters olan lineer operatör ise ve $A$ da $L$'nin bir sıralı bazına göre temsili ise $A^{-1}$ de $L^{-1}$'nin $S$'e göre temsilidir.

3) $L: V \to W$ lineer dönüşümdür ve $\text{boy}(V) = \text{boy}(W)$ olsun. Aşağıdakiler denktir:

a) $L$ ters alınabilir

b) $L$ birebirdir

c) $L$ örtendir

d) $L$'nin $S$ ve $T$'ye göre temsil matrisi olan $A$ singüler değildir.

Date :...../...../.....

Subject :

# Matrislerin Vektör Uzayı ve Lineer Dönüşümlerin Vektör Uzayı

**Tanım:** V ve W boyutları n ve m olan iki vektör uzayı olsun. $L_1 : V \to W$ ve $L_2 : V \to W$ lineer dönüşüm olsun. $L : V \to W$ dönüşümü,

$L(x) = L_1(x) + L_2(x) \quad (\forall x \in V)$ (toplama)

$+ \to \boxplus$, $L : V \to W$, $H : V \to W \quad H(x) = c \cdot L(x)$ (skalerle çarpma)

**Örnek:** $V = \mathbb{R}_2$, $W = \mathbb{R}_2$; $L_1 : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$, $L_2 : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$

$L_1(x) = L_1([a_1 \ a_2 \ a_3]) = [a_1 + a_2 \quad a_2 + a_3]$

$L_2(x) = L_2([a_1 \ a_2 \ a_3]) = [a_1 + a_3 \quad a_2]$

$(L_1 \boxplus L_2)(x) = [2a_1 + a_2 + a_3 \quad 2a_2 + a_3]$

3. $L_1(x) = [3a_1 + 3a_2 \quad 3a_2 + 3a_3]$

**Örnek:** $L_1, L_2, L_3 : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_3$ dönüşümleri

$L_1([a_1 \ a_2]) = [a_1 + a_2 \quad 2a_1 \quad a_2]$

$L_2([a_1 \ a_2]) = [a_2 - a_1 \quad 2a_1 + a_2 \quad a_1]$

$L_3([a_1 \ a_2]) = [3a_1 \quad -2a_2 \quad a_1 + 2a_2]$

$S = \{L_1, L_2, L_3\}$ kümesi lineer bağımsız mıdır?

$c_1 L_1 + c_2 L_2 + c_3 L_3 = 0([1 \ 0]) = [0 \ 0 \ 0]$

$c_1 [1 \ 2 \ 0] + c_2 [-1 \ 2 \ 1] + c_3 [3 \ 0 \ 1] = [c_1 - c_2 + 3c_3 \quad 2c_1 + 2c_2 \quad c_2 + c_3]$

$c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$\Rightarrow$ S kümesi lineer bağımsızdır.

Subject : Date :

**Teorem:** $U, V \to W$ lineer dönüşümler olsun ($boy(V) = n \neq 0$, $boy(W) = m \neq 0$)

O halde $U$ ile $m\mathbb{R}n$ izomorftur

$U \to m\mathbb{R}n$

$M(L)$ = "$L$'nin $S$ ve $T$ bazlarına göre temsili denir"

Sonuç olarak, $boy(U) = m.n$ dir $boy(m\mathbb{R}n) = m.n$ dir

**Örnek:** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ; $S = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, $T = \{\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2\}$ $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^2$ de standart baz lar olsun

$L(\varepsilon_1) = 1\,\bar{\varepsilon}_1 + 2\,\bar{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$L(\varepsilon_2) = 2\,\bar{\varepsilon}_1 - (-1)\,\bar{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$L(\varepsilon_3) = (-1)\,\bar{\varepsilon}_1 + 3\,\bar{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$L(\alpha) = L(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3) = a_1 L(\varepsilon_1) + a_2 L(\varepsilon_2) + a_3 L(\varepsilon_3)$

$= a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$L(\alpha) = \begin{bmatrix} a_1 + 2a_2 - a_3 \\ 2a_1 - a_2 + 3a_3 \end{bmatrix} = A\,\alpha$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$S' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $T' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ olsun $S'$ ve $T'$ ye göre temsili $A$ olan $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü ne olmalıdır?

$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$L(\alpha) = b_1 L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + b_2 L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + b_3 L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$= b_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5b_1 + 5b_3 \\ b_1 + 3b_2 - 6b_3 \end{bmatrix}$

2) $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5a_3 \\ 7a_1 - 6a_3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = 3$

$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 15 \\ 11 \end{bmatrix}$

Subject : Date :...../...../.....

**Tanım:** $V_1, V_2, V_3$ boyutlar sırasıyla $m, n$ ve $p$ olan 3 vektör olsun $L_1: V_1 \to V_2$ ve $L_2: V_2 \to V_3$ lineer dönüşümler olsun. $\forall \alpha \in V_1$ için;

$L_2 \circ L_1 : V_1 \to V_3$ , $(L_2 \circ L_1)(\alpha) = L_2(L_1(\alpha))$

$L \circ L : V \to V$ , $L \circ L = L^2$

**Örnek:** $L_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ , $L_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$L_1\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}, \quad L_2\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$(L_1 \circ L_2)\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = L_1\left(L_2\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{bmatrix}$$

$$(L_2 \circ L_1)\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = L_2\left(L_1\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

## Özdeğer ve Özvektörler

$V$, $n$-boyutlu vektör uzayı, $L: V \to V$, $L(\alpha) = c\alpha$ olacak şekilde bir $c$ sayısı varsa $c$ sayısına **özdeğer**, $\alpha$ vektörüne **özvektör** denir $(\alpha \neq 0)$ $(\alpha \neq \theta)$

**Tanım:** $V$, $n$-boyutlu vektör uzayı, $L: V \to V$ bir lineer operatör olsun. $L(\alpha) = c\alpha$ olacak şekilde $\theta \neq \alpha \in V$ varsa $c$ ye $L$'nin özdeğeri (karakteristik değer), $\alpha$ ya da özvektör (karakteristik vektör) denir.

**Örnek:** $L: V \to V$ , $L(\alpha) = 2\alpha$ olsun özdeğer $= 2$ , özvektör $= \alpha$

**Örnek:** $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$

$a_1 = a_2 \Rightarrow L\left(\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}\right) = 1\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \longrightarrow$ özdeğer $= 1$ özvektör $= \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$

$L\left(\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}\right) = -1\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} \longrightarrow$ özdeğer $= -1$ özvektör $= \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$

**Not:** $L(\alpha) = c\alpha$ ise $\forall r \neq 0$ için

$L(r\alpha) = c(r\alpha) = r(c\alpha)$

Subject : Date :...../...../.....

**Örnek:** $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, saatin tersi yönünde $90°$ rotasyon (döndürme) olsun.

L'nin c katına döndürdüğü tek vektör sıfır vektörü $(\theta)$ olduğundan özdeğer ve özvektör yoktur

**Örnek:** $L: \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$, $L([a_1\ a_2]) = [0\ a_2]$

$$a_1 = 0 \Rightarrow L([0\ a]) = 1\,[0\ a]$$

özdeğer özvektör

$$0\,[a\ 0]$$

özdeğer özvektör

**Örnek:** V, türevlenebilir fonksiyonlar uzayı olsun

$L: V \to V$, $L(f) = f'$ olarak tanımlansın. özdeğer ve özvektörleri nasıl bulunur

$L(f) = cf = f'$, $\frac{dy}{dx} = cy \Rightarrow f(x) = k \cdot e^{cx}$

**Not:** $L: V \to V$ lineer dönüşümler uzayı; boy$(V) = n$; $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

$L(\alpha)$,

$A \cdot [v]_S = c\,[\alpha]_S$

**Örnek:** $L: P_2 \to P_2$; $L(at^2 + bt + c) = ct^2 + bt + a$ olsun $S = \{1-t, 1+t, t^2\}$,

$T = \{1, t, t^2\}$; A matris temsilini bulunuz

$$L(1-t) = t^2 - t = \frac{1}{2}(1-t) - \frac{1}{2}(1+t) + 1 \cdot t^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L(1+t) = t^2 + t = \frac{1}{2}(1-t) + \frac{1}{2}(1+t) + 1 \cdot t^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L(t^2) = 1 = \frac{1}{2}(1-t) + \frac{1}{2}(1+t) + 0 \cdot t^2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Örnek:** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ A'nın özdeğerlerini ve onlara karşılık gelen özvektörlerini bulunuz

$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ ve $c \in \mathbb{R}$ $\quad A\alpha = c\alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = c \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 + a_2 = ca_1 \\ -2a_1 + 4a_2 = ca_2 \end{matrix}\right. \quad \left.\begin{matrix} (c-1)a_1 - a_2 = 0 \\ 2a_1 + (c-4)a_2 = 0 \end{matrix}\right\} c = 2 \text{ veya } c = 1$$

$c = 2$ için $\left.\begin{matrix} a_1 - a_2 = 0 \\ 2a_1 - 2a_2 = 0 \end{matrix}\right\} a_1 = a_2 = r \in \mathbb{R}$ $\qquad c = 1$ için $\begin{matrix} 2a_1 - a_2 = 0 \\ 2a_1 - a_2 = 0 \end{matrix}$ $\quad a_1 = \frac{a_2}{2}$, $a_2 = t \in \mathbb{R}$

$$\underset{\text{özdeğer}}{2} \quad \underset{\text{özvektör}}{\begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{özdeğer}}{1} \cdot \underset{\text{özvektör}}{\begin{bmatrix} t \\ t/2 \end{bmatrix}}$$

Subject :

Date :...../...../.....

**Karakteristik Denklem:** $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ matris olsun

$|t \cdot I_n - A|$ determinantına $A$ nın karakteristik polinomu denir

$\det(tI_n - A) = 0$ denklemine de $A$ nın karakteristik denklemi denir

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \qquad f(t) = |t\, I_3 - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 1 \\ -1 & t & -1 \\ -4 & 4 & t-5 \end{vmatrix} = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$$

karakteristik polinom

$f(t) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = 0$

Not: $f(t) = 1 \cdot t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t^1 + a_0$ kök çarpımı $(-1)^n \cdot a_n$

$f(t) = (t-1)(t-2)(t-3)$

$c_1 = \lambda = 1 \quad c_2 = 2 \quad c_3 = 3$

$c_1 = 1$ için $\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} -a/2 \\ a/2 \\ a \end{bmatrix} \quad (a \neq 0)$

$c_2 = 2$ için $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} -a/4 \\ a/4 \\ a \end{bmatrix} \quad (a \neq 0)$

$c_3 = 3$ için $\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = \begin{bmatrix} -a/4 \\ a/4 \\ a \end{bmatrix} \quad (a \neq 0)$

**Teorem (Cayley - Hamilton):** Her matris kendi karakteristik polinomunu kökü dür.

Yani $f(A) = 0$ dır.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad f(t) = |t \cdot I_2 - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -3 \\ -5 & t-7 \end{vmatrix} = (t-1)(t-7) - 15 \Rightarrow f(t) = t^2 - 8t - 8$

$f(A) = A^2 - 8 \cdot A - 8 I_2 = 0 \Rightarrow A^2 - 8A = 8 I_2$

$A^{-1} A (A - 8) = A^{-1} 8 I_2 \Rightarrow \cancel{I_2}(A - 8) = A^{-1} 8 \cancel{I_2}$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{8}(A - 8 I_2)$

$= \frac{1}{8}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -7/8 & 3/8 \\ 5/8 & -1/8 \end{bmatrix}$

Subject : Date :...../...../.....

Uygulama: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

a) Karakteristik polinomunu, özdeğerlerini, özvektörlerini bulunuz.

b) Cayley-Hamilton yöntemini kullanarak $A^{-1}$ bulunuz.

a) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 2 & 7-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow (3-\lambda).(7-\lambda) - 5.2$$

$$21 - 10\lambda + \lambda^2 - 10 = \lambda^2 - 10\lambda + 11$$

$$\longrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 11$$

$\lambda^2 - 10\lambda + 11 \qquad \Delta = 100 - 4.11.1 = 56 \qquad \lambda_1 = \dfrac{10 + \sqrt{56}}{2} = 5 + \sqrt{14} \qquad \lambda_2 = \dfrac{10 - \sqrt{56}}{2} = 5 - \sqrt{14}$

<u>$\lambda_1$ için</u> $\begin{bmatrix} -2-\sqrt{14} & 5 \\ 2 & 2-\sqrt{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-(2+\sqrt{14})v_1 + 5v_2 = 0 \qquad v_1 = \dfrac{\sqrt{14}-2}{2} v_2 \qquad v = v_2 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{14}-2}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

$2v_1 + (2-\sqrt{14})v_2 = 0$

<u>$\lambda_2$ için</u> $\begin{bmatrix} -2-\sqrt{14} & 5 \\ 2 & 2-\sqrt{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad u_1 = \dfrac{-\sqrt{14}-2}{2} u_2 \qquad u = u_2 \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{14}-2}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $p(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda + 11 \Longrightarrow \underset{A^{-1}}{A^2} - 10A + 11I = \underset{A^{-1}}{0}$

$$\underbrace{A^{-1}.A}_{I}.A - 10\underbrace{A^{-1}.A}_{I} + 11.A^{-1}I = \underbrace{A^{-1}.0}_{0}$$

$$A - 10I + 11.A^{-1} = 0 \qquad A^{-1} = \frac{1}{11}(10I - A)$$

$$= \begin{bmatrix} 7/11 & -5/11 \\ -2/11 & 3/11 \end{bmatrix}$$